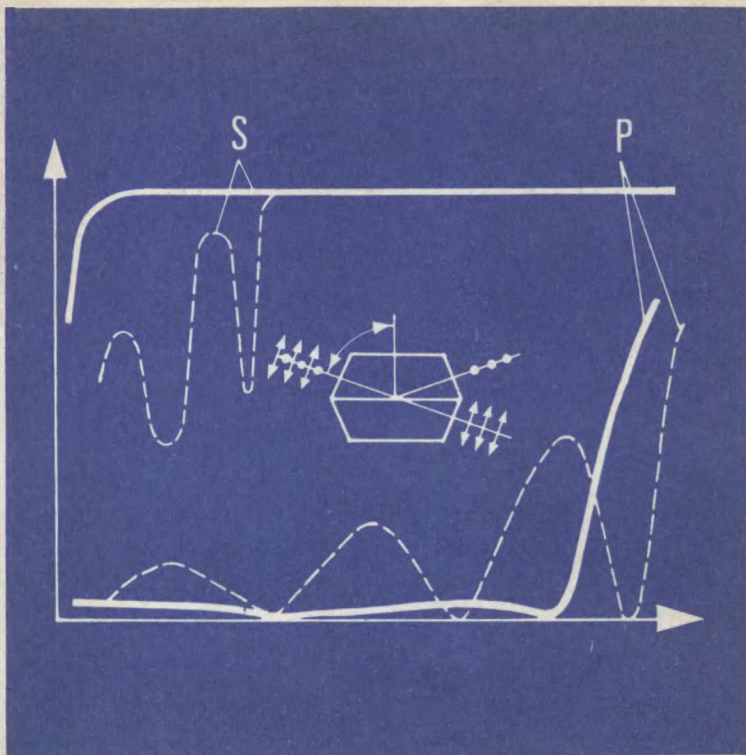




БИБЛИОТЕКА ПРИБОРОСТРОИТЕЛЯ



П.П.ЯКОВЛЕВ  
Б.Б.МЕШКОВ

# ПРОЕКТИРОВАНИЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ПОКРЫТИЙ



**БИБЛИОТЕКА ПРИБОРОСТРОИТЕЛЯ**



**П.П.ЯКОВЛЕВ  
Б.Б.МЕШКОВ**

# **ПРОЕКТИРОВАНИЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ПОКРЫТИЙ**

МОСКВА « МАШИНОСТРОЕНИЕ » 1987



Scan AAW

ББК 34.7

Я 47

УДК 666.1.056:535,345.6

Рецензент А. В. Попов

**Яковлев П. П., Мешков Б. Б.**  
Я47 Проектирование интерференционных покрытий.—  
М.: Машиностроение, 1987. — 192 с., ил. — (Б-ка  
приборостроителя).  
(В обл.): 55 к.

Рассмотрены методы проектирования многослойных интерференционных пленочных покрытий. Наряду с изложением различных методов синтеза конструкций покрытий значительное внимание уделено вопросам устойчивости их спектральных характеристик к влиянию факторов, действующих при реальных условиях изготовления покрытий. Книга иллюстрирована большим количеством примеров синтеза просветляющих, светоделительных, фильтрующих и поляризующих покрытий.

Предназначена для инженерно-технических работников оптического приборостроения, занимающихся созданием оптических систем различного назначения.

Я  $\frac{2706000000-069}{038(01)-87}$  69-87

ББК 34.7

© Издательство «Машиностроение», 1987

Развитие оптики тонкослойных покрытий тесно связано с прогрессом в оптическом приборостроении, квантовой электронике, спектроскопии, голографии. Интерференционные покрытия используют для получения высоких коэффициентов отражения (зеркальные покрытия), для увеличения пропускания и улучшения контрастности оптических систем (просветляющие покрытия), для спектрального и энергетического разделения и совмещения оптических сигналов и их хроматической коррекции (узкополосные, полосовые, отрезающие и отрицательные фильтры), для поляризации излучения (интерференционные поляризаторы) и т. д.

В последние годы достигнуты значительные успехи в совершенствовании методов получения плёнок с воспроизводимыми оптическими свойствами. Наряду с уже ставшим традиционным методом термического испарения, применяемым для получения плёнок сульфидов и фторидов металлов, широкое распространение получил метод электронно-лучевого испарения, позволяющий получать плёнки тугоплавких окислов металлов и полупроводников. В самое последнее время в периодической литературе появились сообщения об использовании новой модификации метода ионно-плазменного распыления — магнетронного распыления на постоянном и переменном токе для изготовления оптических покрытий. Развитие новых методов получения плёнок для оптических целей, совершенствование технологического оборудования, а также расширение номенклатуры плёночных материалов, в значительной степени стимулировали разработку методов расчета интерференционных покрытий. Предлагаемая книга посвящена исключительно вопросам расчета многослойных оптических покрытий.

Представление о цели книги в достаточной мере дает ее оглавление. С одной стороны, авторы стремились познакомить читателя с современным подходом к расчету оптических покрытий, а с другой — с помощью примеров описать характеристики некоторых типов покрытий, представляющих интерес не только для разработчиков, занимающихся конструированием покрытий, но также для специалистов, использующих покрытия в своей деятельности. При этом главное внимание уделялось конструированию покрытий, реализуемых на современном технологическом оборудовании.

Авторы не стремились обобщить и исчерпывающе оценить все известные к настоящему времени методы расчета интерференционных покрытий. В книге отсутствует, например, описание ряда аналитических методов конструирования покрытий, детально изложенных в работах П. Г. Карда [14], Ш. А. Фурмана [33], З. Книттла [45]. В предлагаемой книге представлены в основном методы, не нашедшие подробного отражения в упомянутых изданиях, которые, однако, получили достаточно широкое применение в практике конструирования покрытий. К ним, например, относится метод эквивалентных слоев. Последовательно излагаются численные методы конструирования покрытий и связанные с ними вопросы: постановка задачи, определение вида целевой функции, выбор оптимального поискового метода. Следует отметить, что машинные методы конструирования оптических покрытий в настоящее время оформились в самостоятельное направление, которое продолжает интенсивно развиваться. Большой вклад в развитие этого направления в СССР внесли И. М. Минков, З. Н. Эльснер, Е. Г. Столов, А. В. Тихонравов, Ш. А. Фурман, А. Г. Жиглинский и др.

В книгу включена также глава, посвященная методам анализа устойчивости характеристик покрытий при возмущениях параметров слоев. Такой анализ является важным элементом всего процесса проектирования покрытий. Эти вопросы рассматривались главным образом в периодической литературе.

Кроме того, в книге приведено большое число примеров конструкций различных типов покрытий. При этом выбор конструктивных параметров слоев покрытий ограничивался в основном видимой и ближней инфракрасной областями спектра. Однако это обстоятельство не является серьезным недостатком, поскольку принципы расчета остаются неизменными при проектировании любых покрытий, используемых в различных спектральных диапазонах.

Авторы считают своим долгом выразить глубокую благодарность профессору Г. М. Звереву за постановку задачи, определение ее перспективности и поддержку на всех этапах выполнения работы.

Параграф 4 гл. 1, п. 2 гл. 2, гл. 5 и приложение написаны Б. Б. Мешковым, остальные параграфы — П. П. Яковлевым.

Разработку интерференционного покрытия можно условно разделить на два этапа. На первом этапе определяется конструкция покрытия — число слоев, их показатели преломления и толщины, — обеспечивающая получение с заданной точностью требуемых оптических характеристик. Второй этап связан с технологической реализацией полученных решений. Условность такого разделения объясняется тем, что уже на этапе конструирования конкретного покрытия необходимо учитывать возможности его изготовления, т. е. наличие пленочных материалов с нужными физическими и эксплуатационными свойствами, особенности используемого технологического оборудования и контрольно-измерительной аппаратуры и т. д. Но даже при наличии принципиально реализуемой конструкции покрытия, как правило, требуется определенная технологическая проработка, в ходе которой нередко оказывается необходимым проведение дополнительных расчетов с целью корректировки первоначальной конструкции.

В этом смысле конструирование покрытий с некоторыми наперед заданными свойствами следует рассматривать как часть более общей задачи — проектирования покрытий.

Проектирование реального покрытия обычно осуществляется в следующей последовательности [23]:

- 1) формулирование требований, предъявляемых к покрытию;
- 2) выбор структуры покрытия;
- 3) определение числа слоев и их параметров, обеспечивающих получение требуемых характеристик;
- 4) оценка устойчивости характеристик покрытия к действию дестабилизирующих факторов, связанных с контролем толщин слоев покрытия, свойствами пленочных веществ и т. д.;
- 5) выработка технологических рекомендаций.

Таким образом, проектирование покрытий, помимо расчета конструкции покрытия, включает учет конкретных условий использования покрытия, свойств пленочных материалов и методов их получения, «технологичности» синтезируемой конструкции и т. д.

Требования, предъявляемые к оптическим характеристикам покрытия, очевидно, определяются характером его применения. Для

просветляющих покрытий — это спектральная область малого отражения и уровень остаточного коэффициента отражения; для фильтрующих — спектральные области высокого отражения и высокого пропускания, абсолютные значения коэффициентов отражения и пропускания, крутизна характеристики и т. д. При этом принимаются во внимание также оптические параметры окружающих сред, диапазон углов падения световой волны на покрытие, состояние поляризации излучения. На этом этапе проектирования также уясняются условия эксплуатации, определяющие требования к механической прочности, климатической надежности, устойчивости к воздействию мощного излучения и т. д. Все эти требования в значительной степени влияют на выбор структуры покрытия и пленочных материалов, используемых в качестве слоев. При выборе структуры покрытия также учитываются наличие технологического оборудования, особенности методов нанесения пленок и средств контроля их параметров.

Выбор структуры покрытия и последующее определение параметров слоев по существу составляют задачу конструирования. На этом этапе проектировщику приходится решать две задачи. Первая (прямая) задача заключается в расчете энергетических и фазовых характеристик покрытия с известной структурой. Под энергетическими характеристиками понимают спектральные и угловые зависимости коэффициентов отражения, пропускания и поглощения, а под фазовыми характеристиками — значения фазовых сдвигов, приобретенных световой волной при отражении и прохождении многослойной структуры.

Задача расчета характеристик интерференционного покрытия базируется на решении стационарного волнового уравнения в приближении плоских волн. К настоящему времени разработано большое число вычислительных схем, применяемых для расчета характеристик интерференционных покрытий. Наиболее распространенным, по-видимому, является подход, основанный на вычислении тангенциальных составляющих векторов напряженности электрического и магнитного полей последовательно на всех границах слоев, образующих покрытие. Введение матричной формы записи уравнений, связывающих амплитуды полей на соседних границах, позволило в компактной форме достаточно последовательно учесть интерференционные эффекты в слоистых структурах всех типов.

Вторая задача (собственно задача синтеза) является обратной по отношению к первой. К сожалению, до настоящего времени не разработан строго последовательный метод решения этой задачи, в равной мере пригодный для конструирования покрытий всех типов. Основные трудности, встречающиеся при выполнении этой задачи, связаны с необходимостью решения системы нелинейных

уравнений. На практике решение таких систем в замкнутой форме удается получить в очень немногих случаях, в частности для покрытий, состоящих из небольшого числа слоев и при весьма сильных ограничениях, налагаемых на их структуру. С этим связано существование большого числа методов конструирования, ориентированных главным образом на решение частных задач. Среди аналитических методов синтеза можно отметить два, хотя специализированных, но достаточно мощных метода, — эквивалентных слоев и эффективных границ.

Сущность метода эквивалентных слоев заключается в сведении многослойной системы в одно- или двухслойную, что существенно облегчает анализ ее характеристик. Этот метод получил широкое распространение при конструировании как диэлектрических, так и металлодиэлектрических фильтров отрезающего типа, светоделительных и поляризующих покрытий.

Метод эффективных границ основывается на анализе слоистых систем, имеющих структуру фильтра Фабри—Перо, и используется главным образом для синтеза фильтрующих покрытий. Этот метод позволил также получить практически ценные результаты при конструировании многослойных просветляющих покрытий.

В последние годы стали интенсивно разрабатываться машинные методы синтеза покрытий. Один из подходов при машинном конструировании основан на введении специальным образом построенного показателя (функции) качества, численно оценивающего отклонение от заданного уровня аппроксимирующей характеристики многослойной системы. При этом минимальному значению показателя качества соответствует наилучшее совпадение характеристик. Попытки решить эту задачу перебором параметров слоев с последующим расчетом характеристик не увенчались успехом вследствие чрезвычайно больших затрат машинного времени. Лучшие результаты были получены при использовании формальных методов многопараметрической оптимизации.

Основным преимуществом машинных методов является то, что они, в принципе, позволяют учитывать в расчетах точную математическую модель покрытия. Кроме того, располагая пакетом программ для ЭВМ, конструированием покрытий может заниматься персонал, не имеющий специальной математической подготовки.

На заключительном этапе проектирования анализируется чувствительность характеристик покрытия к действию различных дестабилизирующих факторов, имеющих место при его изготовлении. К таким факторам относятся изменения параметров слоев покрытия, обусловленные нестабильностью процесса нанесения слоев и погрешностями контрольно-измерительной аппаратуры. Очевидно, что требование устойчивости характеристик покрытия тесно связа-



но с их воспроизводимостью в эксперименте. Эта часть проблемы решается моделированием на ЭВМ процесса контроля параметров слоев. Моделирование дает возможность прогнозировать поведение характеристик реального покрытия и исключить из рассмотрения заведомо неустойчивые решения. Оно позволяет также учесть отклонения спектральных характеристик покрытий, связанных с изменением параметров слоев после их изготовления, которые вызваны действием внешних факторов (по существу здесь речь идет о создании модели «деградации» покрытия), и в случае недопустимого изменения оптических характеристик ввести соответствующие корректировки в рассчитанную конструкцию.

Последовательное выполнение всех этапов проектирования обеспечивает разработку покрытий с воспроизводимыми оптическими характеристиками и, таким образом, предопределяет успех конечного результата — создание технологии изготовления интерференционных покрытий.

## РАСЧЕТ ОПТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ПОКРЫТИЙ

### 1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Для последовательного изложения свойств многослойных интерференционных покрытий в настоящем параграфе кратко рассмотрены основные положения теории распространения электромагнитных волн в наиболее простом, но практически важном случае однородных и изотропных сред [7]. Поведение электромагнитной волны в этом случае описывается следующей системой уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  — соответственно векторы электрической и магнитной индукции;  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — векторы напряженности электрического и магнитного поля;  $\mathbf{j}$  и  $\rho$  — вектор плотности токов и плотность электрических зарядов в среде;  $c$  — скорость распространения электромагнитной волны в вакууме. Пять основных величин:  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{j}$ , характеризующих взаимодействие электромагнитного поля с веществом, при этом удовлетворяют следующим материальным уравнениям:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},\tag{2}$$

где  $\varepsilon$ ,  $\mu$  — электрическая и магнитная проницаемости среды;  $\sigma$  — проводимость среды.

При рассмотрении монохроматических волновых процессов, когда электромагнитное поле изменяется во времени по синусоидальному закону, векторы  $\mathbf{E}(t)$  и  $\mathbf{H}(t)$  удобно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(t) &= \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}(\omega) e^{i\omega t} \}; \\ \mathbf{H}(t) &= \operatorname{Re} \{ \mathbf{H}(\omega) e^{i\omega t} \},\end{aligned}\tag{3}$$

где  $\operatorname{Re}$  означает вещественную часть комплексного вектора;  $\mathbf{E}(\omega)$  и  $\mathbf{H}(\omega)$  — векторные амплитуды;  $\omega$  — круговая частота монохрома-

тического процесса, которая связана с частотой  $f$  известным соотношением  $\omega = 2\pi f$ .

Подставляя соотношения (3) в уравнения (1) и учитывая материальные уравнения (2), получим два уравнения для роторов напряженности электрического и магнитного полей:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -ik\mu\mathbf{H}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= ik\varepsilon\mathbf{E},\end{aligned}\quad (4)$$

где  $\mu = \mu' - i\mu'' = |\mu| e^{-i\delta\mu}$ ;  $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon'' = |\varepsilon| e^{-i\delta\varepsilon}$ ;  $k = \omega/c$  — волновое число,  $\text{см}^{-1}$ .

Рассмотрим распространение плоской монохроматической электромагнитной волны в однородной и изотропной среде с произвольными комплексными проницаемостями  $\varepsilon$  и  $\mu$ . Под плоской волной понимают электромагнитное поле, векторы  $\mathbf{E}(t)$  и  $\mathbf{H}(t)$  которого в каждый момент времени принимают постоянные значения в системе параллельных плоскостей. Если ось  $z$  выбрать перпендикулярной этим плоскостям, то в плоской монохроматической волне комплексные амплитуды электрического и магнитного полей будут зависеть только от координаты  $z$ , т. е.  $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$ . Отсюда получим

$$E_z = 0; \quad H_z = 0. \quad (5)$$

Из равенств (5) следует, что волна поперечна. В общем случае при распространении волны в направлении  $+z$  связь между векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  определяется выражением

$$\mathbf{E} = -\sqrt{(\mu/\varepsilon)} [s\mathbf{H}]. \quad (6)$$

При этом из (6) следует, что векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $s$  образуют правую ортогональную тройку векторов.

Для анализа распространения плоской волны в однородной среде запишем уравнения (4) в декартовой системе координат  $(x, y, z)$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= ik\mu H_x; \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= ik\mu H_y; \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= ik\mu H_z; \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -ik\varepsilon E_x; \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -ik\varepsilon E_y; \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= -ik\varepsilon E_z. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Подстановка равенств (5) в уравнения (7) приводит к двум независимым системам уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE_x}{dz} = ik\mu H_y; \quad \frac{dE_y}{dz} = -ik\mu H_x; \\ \frac{dH_y}{dz} = ikeE_x; \quad \frac{dH_x}{dz} = -ikeE_y. \end{array} \right. \quad (8)$$

В уравнениях (8) символ  $\partial/\partial z$  заменен на  $d/dz$ , поскольку все величины зависят только от координаты  $z$ . Исключая из уравнений (8) любую из четырех компонент векторов поля, можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + k^2 \epsilon \mu U = 0. \quad (9)$$

Общее решение этого уравнения можно представить следующим образом:

$$U = C_1 \exp(-ik\sqrt{\epsilon\mu}z) + C_2 \exp(ik\sqrt{\epsilon\mu}z), \quad (10)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные. Тогда для каждой из четырех ненулевых компонент векторов поля  $E_x$ ,  $H_y$ ,  $E_y$  и  $H_x$  из системы уравнений (8) можно записать выражения, аналогичные решению (10):

$$\begin{aligned} E_x &= A \exp(-ik\sqrt{\epsilon\mu}z) + B \exp(ik\sqrt{\epsilon\mu}z); \\ H_y &= \frac{1}{Z_0} [A \exp(-ik\sqrt{\epsilon\mu}z) - B \exp(ik\sqrt{\epsilon\mu}z)]; \\ E_y &= C \exp(-ik\sqrt{\epsilon\mu}z) + D \exp(ik\sqrt{\epsilon\mu}z); \\ H_x &= \frac{1}{Z_0} [-C \exp(-ik\sqrt{\epsilon\mu}z) + D \exp(ik\sqrt{\epsilon\mu}z)]. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $Z_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = \sqrt{|\mu/\epsilon|} e^{i(\delta_\mu - \delta_\epsilon)/2}$  называется волновым сопротивлением (импедансом) среды.

Для понимания физического смысла полученных выражений достаточно рассмотреть решения для  $E_x$  и  $H_y$ , причем ограничившись только первыми слагаемыми, положив  $B=0$ , т. е.

$$\begin{aligned} E_x &= A \exp(-ik\sqrt{\epsilon\mu}z); \\ H_y &= (1/Z_0) A \exp(-ik\sqrt{\epsilon\mu}z). \end{aligned} \quad (12)$$

Далее введем следующие обозначения:  $N = \sqrt{\epsilon\mu} = n - i\kappa$  и  $A = |A| e^{i\varphi}$ . В этом случае из соотношений (3) нетрудно получить

$$E_x = |A| e^{-\kappa z} \cos(\omega t - nz + \varphi); \quad (13)$$

$$H_y = \frac{1}{Z_0} |A| e^{-\kappa z} \cos\left(\omega t - nz + \varphi + \frac{\delta_\epsilon - \delta_\mu}{2}\right).$$

Если не учитывать экспоненциальный множитель  $e^{-\kappa z}$ , то решения (13) описывают электромагнитную волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $z$  со скоростью  $v=c/n$ . Экспоненциальный множитель характеризует затухание волны.

Величина  $N=n-i\kappa$  на оптических частотах называется комплексным показателем преломления и является основной характеристикой среды. Действительная часть этой величины определяет скорость распространения волны в среде. Мнимую часть комплексного показателя преломления обычно называют показателем поглощения. Физический смысл этой величины заключается в том, что она характеризует скорость убывания амплитуды волны в направлении ее распространения.

Заметим, что, если показатель преломления  $N$  веществен, то амплитуды полей не изменяются вдоль оси  $z$ , а фаза повторяется при изменении  $z$  на величину  $\lambda$ . Тогда

$$kn\lambda = 2\pi; \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \frac{1}{n}. \quad (14)$$

Соотношения (14) являются определением длины волны в однородной среде.

Энергия, переносимая волной, выражается с помощью усредненного во времени вектора Пойнтинга, который определяется как векторное произведение амплитуд электрического и магнитного полей

$$\mathbf{P}(z) = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*], \quad (15)$$

где звездочка означает комплексно-сопряженную величину. Подставляя решения (13) в формулу (15), получим

$$P(z) = \frac{c}{8\pi} n |A|^2 \exp(-\alpha z),$$

где  $\alpha = (4\pi\kappa)/\lambda$  — коэффициент экстинкции,  $\text{см}^{-1}$ . Если в среде существует также отраженная волна, распространяющаяся в направлении координаты  $z$ , выражение (15) имеет вид

$$P(z) = \frac{c}{8\pi} [n(|A|^2 e^{-\alpha z} - |B|^2 e^{-\alpha z}) - 2\kappa |A||B| \sin\left(\frac{4\pi}{\lambda} z\right)].$$

В частном случае, когда среда прозрачна, т. е. при  $\sigma=0$ , это выражение существенно упрощается:

$$P(z) = \frac{c}{8\pi} n(|A|^2 - |B|^2) = P^+(z) - P^-(z).$$

Здесь знак плюс относится к распространяющейся волне, а знак минус — к отраженной. Из этого выражения следует, что в непоглощающей среде распространяющуюся и отраженную волны можно рассматривать независимо [5].

## 2. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕ ДВУХ СРЕД

Рассмотрим задачу об отражении и прохождении плоской монохроматической волны, падающей на плоскую поверхность, разделяющую две изотропные прозрачные среды с показателями преломления  $n(z<0)$  и  $n'(z>0)$  (рис. 1). Предположим, что ось  $x$  декартовой системы координат  $x y z$  совпадает с линией пересечения плоскости падения волны и поверхности раздела  $z=0$ . Предположим также, что волна падает на границу раздела слева в направлении единичного вектора  $s$ , лежащего в плоскости  $yz$ . На границе раздела сред падающая волна разделяется на преломленную и отраженную волны. Существование отраженной и преломленной волн вытекает из граничных условий, так как им невозможно удовлетворить, если не постулировать существование этих волн. В соответствии с рис. 1 направления распространения преломленной и отраженной волн определяются единичными векторами  $s'$  и  $s''$ , также лежащими в плоскости  $yz$ . Векторы  $s$ ,  $s'$  и  $s''$  образуют с осью  $z$  углы  $\theta$ ,  $\theta'$  и  $\theta''$ , причем  $\theta=\pi-\theta'$ , а углы падения и преломления связаны законом преломления света

$$n \sin \theta = n' \sin \theta'. \quad (16)$$

Предположим, что преломленная и отраженная волны являются плоскими, и найдем выражения для их амплитуд [42].

Векторы  $E$  и  $H$  произвольно поляризованной волны можно представить в виде линейной комбинации двух независимых направлений. Обозначим через  $E_p$  параллельную, а через  $E_s$  перпен-

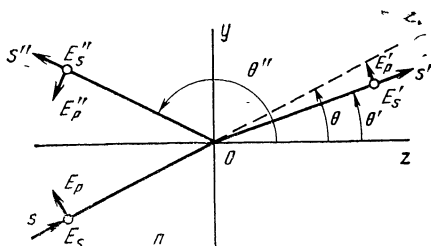


Рис. 1. Преломление и отражение плоской электромагнитной волны на границе раздела двух сред

дикулярную плоскости падения волны компоненту вектора  $\mathbf{E}$ . В первом случае говорят, что волна параллельно (или  $p$ -) поляризована, во втором случае — волна перпендикулярно (или  $s$ -) поляризована. Пусть  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  — единичные векторы, параллельные координатным осям. Тогда в соответствии с рис. 1 можно записать

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \mathbf{j} \sin \theta + \mathbf{k} \cos \theta; \\ \mathbf{s}' &= \mathbf{j} \sin \theta' + \mathbf{k} \cos \theta'; \\ \mathbf{s}'' &= \mathbf{j} \sin \theta'' + \mathbf{k} \cos \theta''. \end{aligned} \quad (17)$$

Представим векторы электрического поля падающей, преломленной и отраженной волн через параллельные и перпендикулярные компоненты в том же базисе:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= iE_s + jE_p \cos \theta - kE_p \sin \theta; \\ \mathbf{E}' &= iE'_s + jE'_p \cos \theta' - kE'_p \sin \theta'; \\ \mathbf{E}'' &= iE''_s + jE''_p \cos \theta'' - kE''_p \sin \theta''. \end{aligned} \quad (18)$$

Используя соотношения (6), (17) и (18), получим аналогичные выражения для векторов магнитного поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= n (-iE_p - jE_s \cos \theta - kE_s \sin \theta); \\ \mathbf{H}' &= n' (-iE'_p - jE'_s \cos \theta' - kE'_s \sin \theta'); \\ \mathbf{H}'' &= n (-iE''_p - jE''_s \cos \theta'' - kE''_s \sin \theta''). \end{aligned} \quad (19)$$

Исходя из граничных условий для векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , которые требуют, чтобы их тангенциальные составляющие (т. е. параллельные границе раздела сред) были непрерывны при переходе через границу, запишем для вектора электрического поля

$$\begin{aligned} E_s + E''_s &= E'_s; \\ E_p \cos \theta + E''_p \cos \theta'' &= E'_p \cos \theta' \end{aligned} \quad (20)$$

и для вектора магнитного поля

$$\begin{aligned} n (E_s \cos \theta + E''_s \cos \theta'') &= n' E'_s \cos \theta'; \\ n (E_p + E''_p) &= n' E'_p. \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнения (20) и (21) перегруппируем таким образом, чтобы выделить перпендикулярную и параллельную составляющие вектора  $\mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned} E_s + E''_s &= E'_s; \\ n (E_s - E''_s) \cos \theta &= n' E'_s \cos \theta'; \\ (E_p - E''_p) \cos \theta &= E'_p \cos \theta'; \end{aligned} \quad (22)$$

$$n(E_p + E_p'') = n'E_p'. \quad (23)$$

Здесь учтено, что  $\theta'' = \pi - \theta$ . Из уравнений (22) и (23) следует, что  $s$ - и  $p$ -поляризованные компоненты вектора электрического поля не зависят друг от друга и их можно рассматривать отдельно. Решив систему уравнений (22) относительно  $E_s'$  и  $E_s''$ , свяжем последние с перпендикулярной компонентой вектора электрического поля падающей волны:

$$\frac{E_s''}{E_s} = \frac{n \cos \theta - n' \cos \theta'}{n \cos \theta + n' \cos \theta'} = r_s; \quad (24)$$

$$\frac{E_s'}{E_s} = \frac{2n \cos \theta}{n \cos \theta + n' \cos \theta'} = t_s. \quad (25)$$

Из системы уравнений (23) получим аналогичные выражения для параллельной компоненты электрического поля отраженной и преломленной волн:

$$\frac{E_p''}{E_p} = \frac{n' \cos \theta - n \cos \theta'}{n \cos \theta' + n' \cos \theta} = r_p; \quad (26)$$

$$\frac{E_p'}{E_p} = \frac{2n \cos \theta}{n \cos \theta' + n' \cos \theta} = t_p. \quad (27)$$

Формулы (24)–(27) определяют амплитудные (френелевские) коэффициенты отражения  $r$  и пропускания  $t$  различно поляризованных компонент излучения.

Для того чтобы определить распределение энергии электрического поля падающей волны между полями отраженной и преломленной волн, выражение для вектора Пойнтинга запишем в виде

$$\mathbf{P} = \frac{c}{4\pi} n E^2 \mathbf{s}. \quad (28)$$

Тогда в соответствии с рис. 1 количество энергии  $J$ , переносимой волной через единицу площади поверхности раздела сред за 1 с, будет

$$J = \mathbf{P} \mathbf{k} = \frac{c}{4\pi} n E^2 \cos \theta. \quad (29)$$

Теперь можно определить коэффициенты отражения  $R$  и пропускания  $T$  как отношение усредненных во времени отраженного и прошедшего через границу раздела сред потока энергии к падающему потоку:

$$R = \frac{J''}{J} = \left( \frac{E''}{E} \right)^2 = |r|^2; \quad (30)$$



$$T = \frac{J''}{J} = \frac{n' \cos \theta'}{n \cos \theta} \left( \frac{E'}{E} \right)^2 = \frac{n' \cos \theta'}{n \cos \theta} |t_1|^2. \quad (31)$$

Легко проверить, что в соответствии с законом сохранения энергии

$$R + T = 1.$$

Рассмотрим некоторые особенности отражения и преломления плоской волны, вытекающие из формул Френеля. Используя соотношение Снеллиуса (16), формулы (24)—(27) можно переписать следующим образом:

$$r_s = - \frac{\sin(\theta - \theta')}{\sin(\theta + \theta')}; \quad (32)$$

$$t_s = \frac{2 \sin \theta' \cos \theta}{\sin(\theta + \theta')}; \quad (33)$$

$$r_p = \frac{\operatorname{tg}(\theta - \theta')}{\operatorname{tg}(\theta + \theta')}; \quad (34)$$

$$t_p = \frac{2 \sin \theta' \cos \theta}{\sin(\theta + \theta') \cos(\theta + \theta')}. \quad (35)$$

Здесь необходимо сделать замечание относительно выбора знаков в правых частях соотношений (32)—(35). Существующий известный произвол в выборе знаков связан с выбором системы координат для отраженного луча. Это приводит к тому, что в формулах (32) и (34) могут быть получены разные знаки. В данном случае выражения (24)—(27) и (32)—(35) основаны на таком выборе  $s$ - и  $p$ -направлений [1], при котором эти направления совме-

стно с направлениями падающей, отраженной и преломленной волн образуют правосторонние декартовы системы координат (рис. 1). Заметим, что вопрос о знаках в формулах Френеля имеет значение только при анализе поляризаций и фаз и не играет никакой роли при определении интенсивности отраженного света.

Из формул (32)—(35) следует, что, если падающая волна поляризована произвольным образом, то поляризации отраженной и преломленной волн будут отличаться от поляризации падающей волны.

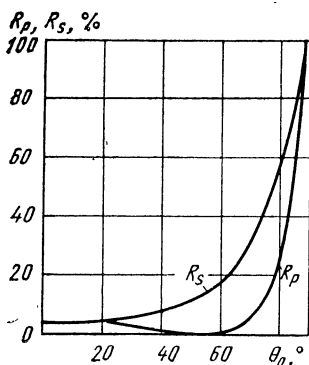


Рис. 2. Зависимости коэффициентов отражения  $s$ - и  $p$ -поляризованного излучения от угла падения на границе воздух — стекло ( $n=1$ ;  $n'=1,52$ )

На рис. 2 показано изменение коэффициента отражения различных поляризованных компонент излучения при падении волны на границу раздела двух прозрачных сред — воздуха и стекла, причем  $n < n'$ . На рисунке видно, что кривая коэффициента отражения  $s$ -поляризованной волны не имеет никаких особенностей:  $R_s$  монотонно возрастает с увеличением угла падения волны. При падении  $p$ -поляризованной волны кривая коэффициента отражения имеет минимум. В случае непоглощающих сред в этом минимуме  $R_p = 0$ . Угол падения, при котором выполняется это условие, называется углом Брюстера; его значение непосредственно определяется из формул Френеля следующим выражением:

$$\operatorname{tg} \theta_B = n'/n.$$

Таким образом, для любого угла падения волны на границу раздела двух сред, отличного от угла Брюстера, отраженная волна оказывается частично поляризованной, а при угле Брюстера — полностью.

Для того чтобы исследовать характер изменения фаз отраженной и преломленной волн, формулы (32)—(35) удобно представить в виде

$$r_s = |r_s| e^{i\varphi_{rs}}; \quad (36)$$

$$t_s = |t_s| e^{i\varphi_{ts}}; \quad (37)$$

$$r_p = |r_p| e^{i\varphi_{rp}}; \quad (38)$$

$$t_p = |t_p| e^{i\varphi_{tp}}, \quad (39)$$

где  $\varphi_{rs}$ ,  $\varphi_{ts}$ ,  $\varphi_{rp}$  и  $\varphi_{tp}$  представляют собой фазовые сдвиги, возникающие при отражении и прохождении волны различной поляризации через границу раздела двух сред.

Из сопоставления формул (32) и (36) следует, что фаза  $s$ -поляризованной волны  $\varphi_{rs} = \pi$  при всех углах падения. При падении  $p$ -поляризованной волны под углом Брюстера  $\theta_B + \theta' = \pi/2$  и, как следует из формулы (34), амплитудный коэффициент отражения меняет знак. Это означает, что фазы отраженной волны при  $\theta_B - \theta < \pi/2$  и  $\theta_B + \theta > \pi/2$  отличаются на  $\pi$  (рис. 3). Фаза  $\varphi_{rp}$  в этом случае при угле Брюстера изменяется скачком от  $2\pi$  до  $\pi$ . Для преломленной волны значение фазы равно фазе падающей волны, поскольку знаки в формулах (33) и (35) совпадают. Отметим одну деталь. Для нормального падения волны формулы (32)—(35) являются неопределенными, а из формул (24) и (26) следует, что  $r_s$  и  $r_p$  имеют равные, но противоположные по знаку действительные значения и, следовательно, должны иметь различные фазы. Это противоречие быстро разрешается, если учесть, что для падаю-

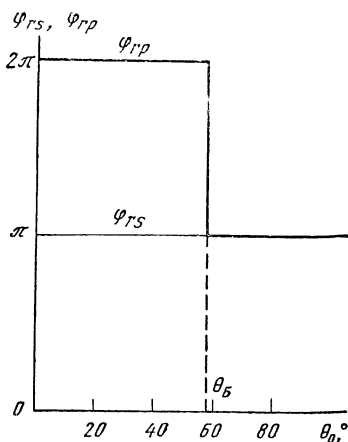


Рис. 3. Зависимости фазовых сдвигов от угла падения излучения при отражении от границы воздух — стекло ( $n=1,0$ ;  $n'=1,52$ )

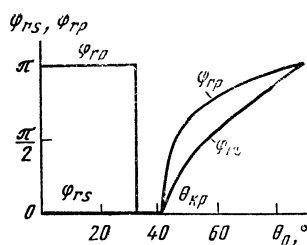


Рис. 4. Зависимости фазовых сдвигов от угла падения излучения при отражении от границы стекло — воздух ( $n=1,52$ ;  $n'=1,0$ )

шей и отраженной волн направлены колебания вектора электрического поля в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, совпадают, а в плоскости падения противоположны друг другу [1].

При распространении волны с произвольной поляризацией из среды с более высоким показателем преломления ( $n > n'$ ) при углах, превышающих критический угол  $\theta_{кр}$ , определяемый соотношением  $\sin \theta_{кр} = n'/n$ , имеет место полное внутреннее отражение. В этом случае угол преломления  $\theta'$  будет чисто мнимым:

$$\cos \theta' = -(i/n') \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - n'^2}, \quad (40)$$

причем перед радикалом следует взять знак минус, чтобы получить затухающую волну в оптически менее плотной среде. Хотя в условиях полного внутреннего отражения отсутствует постоянный поток энергии через границу раздела сред, однако в оптически менее плотной среде существует электромагнитное возмущение, имеющее частоту падающей волны и амплитуду, зависящую от амплитуды стоячей волны перед границей раздела. Эта волна образовалась в результате суперпозиции падающей и отраженной волн. Амплитуда электрического поля по мере проникновения в оптически менее плотную среду затухает по экспоненциальному закону [15]:

$$E = E_0 \exp(-z/d_{пр}),$$

где  $E_0$  — амплитуда электрического поля стоячей волны на границе раздела;  $d_{пр}$  — глубина проникновения электрического поля,

определяемая как расстояние от границы раздела сред, на котором амплитуда поля уменьшается в  $e$  раз. Для прозрачных изотропных сред величина  $d_{\text{нр}}$  определяется выражением

$$d_{\text{нр}} = \frac{\lambda}{2\pi(\gamma^2 \sin^2 \theta - n'^2)^{1/2}}.$$

В явном виде формулы Френеля для случая полного внутреннего отражения можно получить, подставив в формулы (24) и (26) выражение для  $\cos \theta'$  из (40). При этом, как нетрудно убедиться,  $|r_s| = |r_p| = 1$ , а фазовые сдвиги, приобретаемые волной при отражении (рис. 4), определяются из соотношений

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\varphi_{rp}}{2} \right) = \left( \frac{n}{n'} \right) \left[ \left( \frac{n}{n'} \right)^2 \sin^2 \theta - 1 \right]^{1/2} / \cos \theta; \quad (41)$$

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\varphi_{rs}}{2} \right) = \left( \frac{n'}{n} \right) \left[ \left( \frac{n}{n'} \right)^2 \sin^2 \theta - 1 \right]^{1/2} / \cos \theta. \quad (42)$$

На рис. 4 видно, что при  $\theta > \theta_{\text{кр}}$  отраженная волна является эллиптически поляризованной, если только  $E_s$  или  $E_p$  не равны нулю. Из формул (41) и (42) следует, что, подбирая значения показателей преломления сред и угла падения волны, можно задать значения скачков  $\varphi_{rs}$  и  $\varphi_{rp}$ . На этом принципе основана работа фазосдвигающих устройств типа «ромба Френеля».

Формулы Френеля справедливы также для случая поглощающих сред. При этом достаточно в выражениях (24)—(27) действительные значения показателей преломления сред заменить соответствующими комплексными величинами. В таком случае амплитуды отраженной и преломленной волн, а также угол преломления становятся комплексными. Комплексность амплитуд, как следует из формул (36)—(39), означает, что изменение фазы линейно-поляризованной волны на границе раздела сред уже не равно  $2\pi$  или  $\pi$ . Это отличие тем больше, чем больше поглощательная способность сред. Комплексность угла преломления, очевидно, не имеет физического смысла, однако указывает на неоднородность преломленной волны, поскольку в этом случае плоскости равных амплитуд и фаз не совпадают. В явном виде формулы Френеля для поглощающих сред приведены, например, в работе [15].

Формулы Френеля можно представить в более компактной форме, введя понятие «эффективного показателя преломления» [5]. Из рис. 1 следует, что тангенциальные компоненты вектора электрического поля  $p$ - и  $s$ -поляризованного излучения определяются следующими соотношениями:

$$E_{pt} = E_p \cos \theta; \quad E_{st} = E_s, \quad (43)$$

С использованием этих соотношений формулы (24)—(27) можно переписать в виде

$$r = \frac{E_t''}{E_t} = \frac{u - u'}{u + u'}; \quad (44)$$

$$t = \frac{E_t'}{E_t} = \frac{2u}{u + u'}, \quad (45)$$

где

$$u = \begin{cases} u_s = n \cos \theta; \\ u_p = n / \cos \theta; \end{cases} \quad (46)$$

$$E_t = \begin{cases} E_{st} - s\text{-поляризованная волна;} \\ E_{pt} - p\text{-поляризованная волна.} \end{cases} \quad (47)$$

Величины  $u$  и  $u'$  называют эффективными показателями преломления. Их значения совпадают с истинными показателями преломления при нормальном падении волны. Понятие «эффективного показателя преломления» не имеет физического смысла, однако его использование приводит к математически корректным результатам.

Используя новые обозначения, формулы (29)—(31) перепишем в следующем виде:

$$J = \frac{c}{4\pi} u E_t^2; \quad (48)$$

$$R = (E_t''/E_t)^2; \quad (49)$$

$$T = \frac{u'}{u} \left( \frac{E_t'}{E_t} \right)^2. \quad (50)$$

Выражения для тангенциальных составляющих вектора магнитного поля падающей, преломленной и отраженной волн, как трудно показать, имеют вид

$$H_t = u E_t; \quad H_t' = u' E_t'; \quad H_t'' = -u E_t'', \quad (51)$$

где

$$H_t = \begin{cases} H_{pt} - p\text{-поляризованная волна;} \\ H_{st} - s\text{-поляризованная волна.} \end{cases}$$

### 3. ОТРАЖЕНИЕ И ПРОХОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ МНОГОСЛОЙНУЮ СИСТЕМУ

Математически многослойные оптические покрытия описываются системой, состоящей из конечного числа слоев с различными показателями преломления и толщинами, сравнимыми с длиной световой волны, заключенной между двумя полубесконечными средами.

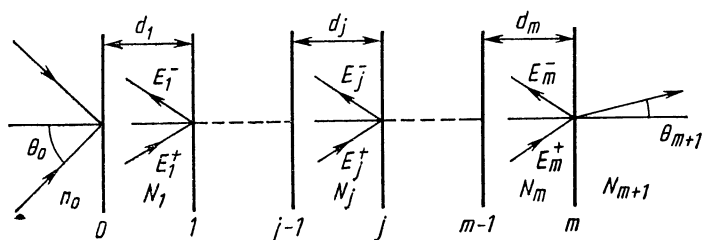


Рис. 5. Структура многослойного интерференционного покрытия

На рис. 5 показана структура оптического покрытия, состоящего из  $m$  слоев. Слои на рисунке пронумерованы слева направо в направлении распространения световой волны. Обычно в теории предполагают, что слои системы однородны, изотропны, имеют строго параллельные границы и бесконечную протяженность в направлениях  $x$  и  $y$ , т. е. вариации поля в этих направлениях отсутствуют. Окаймляющие среды также считают однородными и изотропными. Относительно падающего на покрытие излучения делается предположение, что оно описывается плоской линейно-поляризованной монохроматической волной с фронтом бесконечной ширины. Угол преломления в  $j$ -й среде  $\theta_j$  связан с углом падения излучения  $\theta_0$  соотношением Снеллиуса

$$n_0 \sin \theta_0 = n_j \sin \theta_j, \quad j = 1, \dots, m+1. \quad (52)$$

В рамках сделанных предположений о структуре слоистой системы и падающем излучении ее оптические свойства полностью определяются заданием показателей преломления сред и толщин слоев.

Приведем вывод расчетных формул, предназначенных для анализа оптических свойств многослойных систем [5, 42].

Обозначим через  $E_j^+$  и  $E_j^-$  тангенциальные составляющие вектора электрического поля соответственно распространяющейся и отраженной волн в  $j$ -м слое (рис. 5). Амплитудные коэффициенты отражения  $r$  и пропускания  $t$  многослойной системы определяются следующими выражениями:

$$r = |r| e^{i\varphi_r} = E_0^- / E_0^+; \quad (53)$$

$$t = |t| e^{i\varphi_t} = E_{m+1}^+ / E_0^+, \quad (54)$$

где  $\varphi_r$  и  $\varphi_t$  — фазовые сдвиги, приобретаемые волной при ее отражении и прохождении через многослойную систему, определяемые как разность фаз между отраженной и прошедшей волнами и па-

дающей волной. Величины  $\varphi_r$  и  $\varphi_t$  выражаются через компоненты напряженности электрического поля следующим образом:

$$\varphi_r = \arg [E_0^- / E_0^+]; \quad (55)$$

$$\varphi_t = \arg [E_m^+ / E_0^+]. \quad (56)$$

Символ  $\arg$  означает, что следует взять аргумент комплексной величины, стоящей в скобках.

С учетом соотношений (30) и (31) коэффициенты отражения и пропускания слоистой системы записываются в виде

$$R = |r|^2; \quad (57)$$

$$T = (u_{m+1}/u_0) |t|^2, \quad (58)$$

где  $u_{m+1}$  и  $u_0$  — эффективные показатели преломления окружающих сред.

Рассмотрим интерференцию двух волн, отраженных от левой и правой границ  $j$ -го слоя (рис. 6). Оптическая разность хода в данном случае определяется следующим образом [42]:

$$\Delta_j = n_j AB + n_j BC - n_{j-1} AD = 2n_j d_j \cos \theta_j,$$

где через  $d_j$  обозначена геометрическая толщина  $j$ -го слоя.

Фазовый сдвиг, приобретаемый волной вследствие отражения,

$$2\Phi_j = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta_j = \frac{4\pi}{\lambda} n_j d_j \cos \theta_j. \quad (59)$$

Величина  $\Phi_j$  называется эффективной фазовой толщиной  $j$ -го слоя. Эффективная фазовая толщина не зависит от состояния поляризации излучения. Заметим, что в силу бесконечности  $(m+1)$ -й среды следует выбрать  $\Phi_{m+1} = 0$ .

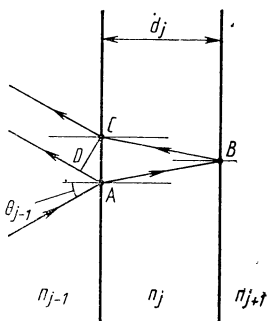


Рис. 6. Сдвиг фазы при прохождении световой волны через  $j$ -й слой [42]

Если угол  $\theta_j$  больше критического, то  $\cos \theta_j$  и, следовательно, эффективные показатели преломления и фазовая толщина  $j$ -го слоя будут чисто мнимыми. Это относится к случаю полного внутреннего отражения, который может рассматриваться в рамках той же вычислительной схемы. При наличии поглощения в слое его фазовая толщина является комплексной величиной, которая одновременно характеризует изменение действительной фазы волны и ослабление ее амплитуды при однократном прохождении слоя.

Теперь определим связь между тангенциальными составляющими векторов электрического и магнитного полей на границах  $j$ -го слоя. Заметим, что волна в точке  $A$  (рис. 6) сдвинута по фазе на величину  $\Phi_j$  относительно точки  $B$ . Тогда значение тангенциальной составляющей вектора электрического поля в положительном направлении оси  $z$  равно  $E_j^+ \exp(i\Phi_j)$ . В точке  $C$  фаза отраженной волны имеет сдвиг на величину  $\Phi_j$  относительно точки  $B$ . Следовательно, ее значение в точке  $C$  равно  $E_j^- \exp(-i\Phi_j)$ . Так как при переходе через границу раздела сред согласно уравнениям Максвелла требуется непрерывность полных тангенциальных составляющих векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , то для  $(j-1)$ -й границы можно записать

$$E_j^+ + E_j^- = E_j^+ \exp(i\Phi_j) + E_j^- \exp(-i\Phi_j); \quad (60)$$

$$H_j^+ + H_j^- = H_j^+ \exp(i\Phi_j) + H_j^- \exp(-i\Phi_j). \quad (61)$$

Уравнение (61) с учетом (51) перепишем в следующем виде:

$$u_{j-1} (E_{j-1}^+ - E_j^-) = u_j [E_j^+ \exp(i\Phi_j) - E_j^- \exp(-i\Phi_j)]. \quad (62)$$

Решая уравнения (60) и (62) относительно  $E_{j-1}^+$  и  $E_{j-1}^-$ , получим выражения для тангенциальных составляющих векторов электрического поля распространяющейся и отраженной волн на  $(j-1)$ -й границе:

$$E_{j-1}^+ = t_{j-1}^{-1} [E_j^+ \exp(i\Phi_j) + r_{j-1} E_j^- \exp(-i\Phi_j)]; \quad (63)$$

$$E_{j-1}^- = t_{j-1}^{-1} [r_{j-1} E_j^+ \exp(i\Phi_j) + E_j^- \exp(-i\Phi_j)], \quad (64)$$

где через  $r_{j-1}$  и  $t_{j-1}$  обозначены амплитудные коэффициенты отражения и пропускания  $(j-1)$ -й границы:

$$r_{j-1} = \frac{u_{j-1} - u_j}{u_{j-1} + u_j}; \quad (65)$$

$$t_{j-1} = \frac{2u_{j-1}}{u_{j-1} + u_j}. \quad (66)$$

Поскольку в  $(m+1)$ -й среде отсутствует отраженная волна, то  $E_{m+1}^- = 0$ ; величину  $E_{m+1}^+$  удобно положить равной единице. Эти условия формально играют роль граничных. Таким образом, вычислив по формулам (63) и (64) значения тангенциальных составляющих векторов электрического поля распространяющейся и отраженной волн последовательно на всех границах слоев, можно определить энергетические и фазовые характеристики многослойного покрытия.



Если  $E_j^+$  и  $E_j^-$  заменить на полные тангенциальные составляющие векторов электрического и магнитного полей с помощью выражений

$$E_j = E_j^+ + E_j^-; \quad H_j = H_j^+ + H_j^- = u_j (E_j^+ - E_j^-), \quad (67)$$

то можно получить другие рекуррентные соотношения для расчета характеристик многослойной системы. Из соотношений (67) следует

$$E_j^+ = \frac{1}{2} (E_j + u_j^{-1} H_j); \quad H_j^- = \frac{1}{2} (E_j - u_j^{-1} H_j). \quad (68)$$

Подставляя эти значения в формулы (63) и (64), получим

$$E_{j-1} = E_j \cos \Phi_j + i u_j^{-1} H_j \sin \Phi_j; \quad (69)$$

$$H_{j-1} = i u_j E_j \sin \Phi_j + H_j \cos \Phi_j, \quad (70)$$

причем  $E_{m+1} = 1$  и  $H_{m+1} = u_{m+1}$ . Коэффициенты отражения и пропускания с учетом формул (53) и (54) в этом случае имеют вид

$$R = \left| \frac{E_0 - u_0^{-1} H_0}{E_0 + u_0^{-1} H_0} \right|^2; \quad (71)$$

$$T = \frac{4 u_{m+1}}{|E_0 + u_0^{-1} H_0|^2}. \quad (72)$$

Формулы для вычисления фазовых характеристик многослойной системы в данном случае имеют вид

$$\varphi_r = \arg \left[ \frac{E_0 - u_0^{-1} H_0}{E_0 + u_0^{-1} H_0} \right]; \quad (73)$$

$$\varphi_t = \arg \left[ \frac{2}{E_0 + u_0^{-1} H_0} \right]. \quad (74)$$

Если  $j$ -й слой является поглощающим, то его коэффициент поглощения описывается выражением

$$A_j = \frac{J_{j-1} - J_j}{J_0},$$

где  $J_0$  — падающий на покрытие поток энергии. В соответствии с формулой (48)

$$J_0 = \frac{c}{4\pi} u_0 |E_0^+|^2.$$

Подставляя в эту формулу выражение для  $E_0^+$  из (68), можно записать коэффициент поглощения в слое в явном виде:

$$A_j = \frac{\operatorname{Re} [E_{j-1} H_{j-1}^*] - \operatorname{Re} [E_j H_j^*]}{(u_0/4) |E_0 + u_0^{-1} H_0|^2}. \quad (75)$$

Заметим, что в соответствии с законом сохранения энергии имеет место следующее равенство:

$$R+T+\sum_{j=1}^m A_j=1.$$

Рекуррентные выражения для расчета амплитуд напряженности электрического и магнитного полей (69) и (70) можно записать в виде эквивалентного матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} E_{j-1} \\ H_{j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Phi_j & iu_j^{-1} \sin \Phi_j \\ iu_j \sin \Phi_j & \cos \Phi_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_j \\ H_j \end{pmatrix} = \mathbf{B}_j \begin{pmatrix} E_j \\ H_j \end{pmatrix}. \quad (76)$$

Матрица  $\mathbf{B}_j$ , являющаяся квадратной матрицей размера  $2 \times 2$ , в общем случае с комплексными элементами, называется характеристической матрицей, или матрицей интерференции  $j$ -го слоя. Детерминант этой матрицы равен единице. Выпишем соотношение (76) последовательно для всех слоев покрытия, начиная с  $m$ -го слоя:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_{m-1} \\ H_{m-1} \end{pmatrix} &= \mathbf{B}_m \begin{pmatrix} E_m \\ H_m \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} E_{m-2} \\ H_{m-2} \end{pmatrix} &= \mathbf{B}_{m-1} \begin{pmatrix} E_{m-1} \\ H_{m-1} \end{pmatrix}; \\ &\vdots \\ \begin{pmatrix} E_0 \\ H_0 \end{pmatrix} &= \mathbf{B}_1 \begin{pmatrix} E_1 \\ H_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Исключая значения амплитуд полей на всех границах внутренних слоев последовательной подстановкой, запишем выражение, связывающее амплитуды электрического и магнитного полей на нулевой и  $m$ -й границах:

$$\begin{pmatrix} E_0 \\ H_0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \dots \mathbf{B}_m \begin{pmatrix} E_m \\ H_m \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^m \mathbf{B}_j \begin{pmatrix} 1 \\ u_{m+1} \end{pmatrix}. \quad (77)$$

Матрица **B** называется характеристической матрицей интерференционной системы. Из выражения (77) следует, что для определения характеристической матрицы системы необходимо перемножить матрицы отдельных слоев в последовательности совпадающей с направлением распространения световой волны. ОпределиТЕЛЬ этой матрицы равен единице, так как равны единице опреде-

лители матриц отдельных слоев. Это обстоятельство может служить для контроля правильности вычислений. Пусть  $b_{ij}$  — матричные элементы характеристической матрицы многослойной системы. Тогда, используя соотношения (53) и (54), нетрудно получить формулы для расчета амплитудных коэффициентов отражения и пропускания плоской электромагнитной волны:

$$r = \frac{u_0 b_{11} + i u_0 u_{m+1} b_{12} - i b_{21} - u_{m+1} b_{22}}{u_0 b_{11} + i u_0 u_{m+1} b_{12} + i b_{21} + u_{m+1} b_{22}} ;$$

$$t = 2 u_0 (u_0 b_{11} + i u_0 u_{m+1} b_{12} + i b_{21} + u_{m+1} b_{22})^{-1} .$$

Можно показать, что при такой форме записи формулы для определения энергетических и фазовых характеристик интерференционного покрытия принимают следующий вид:

$$R = \frac{(u_0 b_{11} - u_{m+1} b_{22})^2 + (u_0 u_{m+1} b_{12} - b_{21})^2}{(u_0 b_{11} + u_{m+1} b_{22})^2 + (u_0 u_{m+1} b_{12} + b_{21})^2} ; \quad (78)$$

$$T = 4 \left( 2 + \frac{u_0}{u_{m+1}} b_{11}^2 + \frac{u_{m+1}}{u_0} b_{22}^2 + u_0 u_{m+1} b_{12}^2 + \frac{b_{21}^2}{u_0 u_{m+1}} \right)^{-1} ; \quad (79)$$

$$\varphi_r = \arctg \left[ \frac{2 (u_{m+1} b_{12} b_{22} - u_{m+1}^{-1} b_{21} b_{11})}{u_0 u_{m+1}^{-1} b_{11}^2 - u_0^{-1} u_{m+1} b_{22}^2 + u_0 u_{m+1} b_{12}^2 - (u_0 u_{m+1})^{-1} b_{21}^2} \right] . \quad (80)$$

$$\varphi_t = \arctg \left( - \frac{b_{21} + u_0 u_{m+1} b_{12}}{u_0 b_{11} + u_{m+1} b_{22}} \right) . \quad (81)$$

Из уравнений (76) и (77) следует, что слоистая система описывается матрицей, элементы которой не зависят от оптических параметров окружающих сред. Кроме того, изменение фазовой толщины  $\Phi_j$  влияет только на матрицу  $j$ -го слоя, а изменение эффективного показателя преломления  $u_j$  — на матрицы  $\mathbf{B}_j$  и  $\mathbf{B}_{j+1}$ . При

этом частные произведения  $\prod_{i=1}^{j-1} B_i$  и  $\prod_{i=j+2}^m B_i$  остаются неизменными.

Эти свойства оказываются весьма полезными при изучении влияния вариаций параметров слоя на характеристики покрытия, а также при решении различных конструкторских задач, поскольку позволяют значительно сократить объем вычислений. Другим полезным свойством, широко используемым на практике, является ассоциативность матричного умножения, согласно которому не имеет значения, как сгруппировано полное произведение матриц отдельных слоев покрытия.

Иногда для расчетов спектральных характеристик применяется вычислительная схема, основанная на использовании адмиттанса [5]. Оптический адмиттанс  $Y(z)$  представляет собой величину, обратную импедансу, т. е. для электромагнитной волны в слоистой системе в любой точке определяется как отношение тангенциальных составляющих напряженности магнитного и электрического полей. Из соотношений (69)—(70) можно непосредственно получить рекуррентное соотношение для расчета  $Y(z)$  последовательно на всех границах слоев и соответствующие граничные условия

$$Y_{j-1} = \frac{Y_j + i u_j \operatorname{tg} \Phi_j}{1 + i (Y_j / u_j) \operatorname{tg} \Phi_j} \quad (82)$$

$$Y_m = u_m.$$

Согласно выражению (71) коэффициент отражения можно записать следующим образом:

$$R = \left| \frac{1 - (Y_0 / u_0)}{1 + (Y_0 / u_0)} \right|^2. \quad (83)$$

Следовательно, зная структуру покрытия и параметры окружающих сред, с помощью приведенных выше формул можно рассчитать оптические характеристики этого покрытия — коэффициенты отражения, пропускания и поглощения, а также фазовые сдвиги, возникающие при отражении и прохождении через него световой волны, для заданных длин волн и углов падения. С вычислительной точки зрения рассмотренные выше расчетные схемы практически эквивалентны: они просты для программной реализации, требуют относительно небольшого числа операций и не приводят к потере точности, связанной с накоплением ошибок вычислений.

При выполнении систематических расчетов характеристик покрытий, принадлежащих к различным классам, целесообразно составить несколько подпрограмм, предназначенных для анализа с учетом и без учета поглощения в слоях покрытий, работающих при нормальном и наклонном падении излучения. Это связано с тем, что при анализе покрытий, состоящих из поглощающих слоев, требуется значительно большее число операций, чем при расчете характеристик непоглощающих покрытий, поскольку показатели преломления и фазовые толщины слоев являются комплексными величинами. Для расчета покрытий при наклонном падении излучения необходимо вдвое больше машинного времени, чем для расчета при нормальном падении, так как задачу в этом случае приходится решать дважды, отдельно для каждого состояния поляризации. Учет этих обстоятельств не играет большой роли при однократном расчете характеристик покрытия. Однако при решении задачи синтеза, когда задачу анализа требуется решать сотни и тысячи раз, затраты ма-

шинного времени могут оказаться настолько большими, что успех решения конкретной задачи будет проблематичным.

Приведенные выше соотношения для расчета характеристик интерференционного покрытия определяют его математическую модель. При этом возникает естественный вопрос, насколько точно эта модель описывает реальное покрытие? Чтобы ответить на такой вопрос, очевидно, необходимо проанализировать принятые при выводе уравнений допущения о структуре покрытия и падающем на него излучении.

Предположения о бесконечной протяженности слоев в направлениях  $x$  и  $y$  (см. рис. 5) и ширине светового пучка исключают из рассмотрения дифракционные эффекты. Это предположение хорошо выполняется на практике, в частности при фотометрических измерениях, когда поперечные размеры покрытия и падающего на него светового пучка велики по сравнению с длиной волны.

Допущение о линейной поляризации падающего на покрытие излучения не ограничивает общности задачи. Если плоскость поляризации не совпадает с плоскостью падения и не перпендикулярна ей, как это предполагалось выше, то необходимо вычислить коэффициенты отражения и пропускания  $s$ - и  $p$ -поляризованных компонент излучения, а затем уже определить истинные характеристики покрытия [5].

Если падающий свет неполяризован, то коэффициенты отражения и пропускания покрытия вычисляют по формулам

$$R=0,5 (R_p+R_s); \quad T=0,5 (T_p+T_s).$$

При эллиптической поляризации падающего излучения с относительными амплитудами  $a_p$  и  $a_s$  характеристики покрытия определяются следующими выражениями:

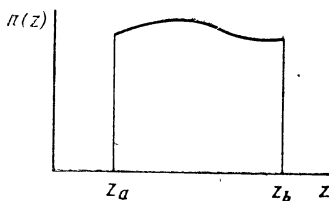
$$R = \frac{a_p^2 R_p + a_s^2 R_s}{a_p^2 + a_s^2}; \quad T = \frac{a_p^2 T_p + a_s^2 T_s}{a_p^2 + a_s^2}.$$

В общем случае при наклоне плоскости поляризации падающей волны к плоскости падения излучения под углом  $\delta$

$$R = R_p \cos^2 \delta + R_s \sin^2 \delta; \quad T = T_p \cos^2 \delta + T_s \sin^2 \delta.$$

Предположение о монохроматичности падающего излучения также не носит ограничивающего характера. Очевидно, что характеристики покрытия могут быть легко проанализированы в диапазоне длин волн при соответствующем изменении  $\lambda$ . При практических расчетах обычно длину волны  $\lambda$  заменяют на величину  $\nu = \lambda_0 / \lambda$ , имеющую смысл нормированной частоты ( $\lambda_0$ —некоторая масштабная длина волны). При этом оптические толщины слоев удобно представлять в виде частей  $\lambda_0$ . Такая замена позволяет представить

Рис. 7. Изменение показателя преломления в неоднородном слое



результаты одного расчета в различных спектральных интервалах при соответствующем выборе  $\lambda_0$ .

Предположение об изотропности оптических параметров слоев покрытия и окружающих сред хорошо выполняется на практике при описании пленок с аморфной и поликристаллической структурой, нанесенных, например, на стеклянные подложки. Пленки с такой структурой в подавляющем большинстве случаев на практике используют в качестве слоев оптических покрытий. Отметим лишь, что для расчета коэффициентов отражения и пропускания поляризованного излучения, падающего в общем случае под углом на анизотропные слоистые системы, разработан метод, использующий матрицы размерностью  $4 \times 4$ . Этот метод является обобщением рассмотренного выше метода [1].

При выводе соотношений для расчета характеристик многослойной системы предполагалось, что оптические свойства внутри каждого слоя постоянны и что они изменяются скачком на границах между слоями. Однако рассмотренная модель оказывается применимой также для анализа покрытий, состоящих из слоев, у которых показатель преломления изменяется по толщине. Тенденция некоторых пленочных материалов образовывать неоднородные слои в практике изготовления покрытий обычно считается нежелательным явлением. Это связано с тем, что характер неоднородности, т. е. вид функции  $n(z)$ , зависит от многих технологических параметров, таких как температура нагрева подложек, давление и состав остаточных газов в напылительной камере, скорость осаждения, чистота исходного сырья и др. В свою очередь, это означает, что для получения воспроизводимой зависимости  $n(z)$  требуется чрезвычайно строгая стабилизация всех параметров технологического процесса. Хотя известны работы по целенаправленному получению неоднородных слоев с воспроизводимыми свойствами, однако из-за сложности экспериментальной реализации такие покрытия до сих пор не имеют промышленного значения.

Неоднородность показателей преломления слоев существенно затрудняет интерпретацию характеристик интерференционных покрытий. Математический аппарат, используемый для описания слоев с непрерывно меняющимся показателем преломления, значительно сложнее. Пусть плоская электромагнитная волна распространяется в направлении оси  $z$  через слой с показателем преломления  $n(z)$ ,

ограниченный плоскостями  $z_a$  и  $z_b$  (рис. 7). Связь амплитуд электрического и магнитного полей между точками  $z_a$  и  $z_b$  описывается соотношениями, аналогичными (76) [30]:

$$\begin{pmatrix} E(z_a) \\ H(z_a) \end{pmatrix} = \mathbf{B}(z_a - z_b) \begin{pmatrix} E(z_b) \\ H(z_b) \end{pmatrix},$$

где элементами матрицы  $\mathbf{B}(z_a - z_b)$  являются взятые в точке  $z_b$  решения системы из четырех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} b_{11} &= -\frac{2\pi}{\lambda} [n(z)]^2 b_{12}, & \frac{d}{dz} b_{12} &= \frac{2\pi}{\lambda} b_{11}; \\ \frac{d}{dz} b_{21} &= \frac{2\pi}{\lambda} [n(z)]^2 b_{22}, & \frac{d}{dz} b_{22} &= -\frac{2\pi}{\lambda} b_{21} \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$b_{11}(z_a) = 1; \quad b_{12}(z_a) = 0; \quad b_{21}(z_a) = 0; \quad b_{22}(z_a) = 1.$$

Решение этой системы уравнений в замкнутой форме удастся получить только для некоторых специальных профилей показателя преломления, в частности, когда  $n(z)$  изменяется линейно или экспоненциально в направлении, перпендикулярном границам слоев.

В общем случае расчет характеристик неоднородного слоя может быть выполнен численным интегрированием, например методом Рунге—Кутты.

Другой подход к расчету характеристик неоднородного слоя заключается в непосредственном решении волнового уравнения. Этот подход особенно удобен для получения различных приближенных решений, имеющих понятный физический смысл. При этом волновое уравнение, являющееся линейным дифференциальным уравнением второго порядка, преобразуется в нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка (типа уравнения Риккати) относительно амплитудного коэффициента отражения.

Приближенные выражения для вычисления коэффициента отражения удастся сравнительно легко получить для очень больших (по сравнению с толщиной слоя) и очень малых длин волн. В первом случае амплитуда электрического поля в пределах слоя полагается постоянной и заменяется некоторым усредненным значением. Во втором случае вводится дополнительное предположение, что функция  $n(z)$  мало изменяется на расстоянии порядка длины волны излучения. При этом неоднородный слой аппроксимируется системой тонких однородных слоев, для которых остается справедливым представление поля в виде суммы полей распространяющейся и отраженной волн. Такой подход позволяет использовать при анализе

покрытий, состоящих из неоднородных слоев, машинные программы расчета характеристик многослойных однородных покрытий.

Разбиение неоднородного слоя можно осуществить различными способами, учитывая характер изменения показателя преломления по толщине путем уменьшения шага разбиения в тех областях, где изменение происходит наиболее резко. Однако при решении большинства встречающихся на практике задач разбиение слоя на равные части дает вполне удовлетворительные результаты. Этот метод оказывается применим также к поглощающим слоям.

Приведенные выше рекуррентные и матричные формулы предназначены для расчета оптических характеристик многослойных покрытий с помощью ЭВМ. Достаточно простые выражения удается получить только в некоторых частных случаях, например для одно- и двухслойных покрытий, а также покрытий, состоящих из периодически повторяющихся групп слоев с одинаковой оптической толщиной. Такие периодические системы являются составным элементом многих типов оптических покрытий — отражающих, фильтрующих, поляризующих и др. С другой стороны, небольшое число пленочных материалов, необходимых для построения периодических структур, создает большие удобства при изготовлении этих покрытий. Ниже рассмотрим некоторые свойства многослойных периодических систем.

#### 4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим многослойную систему, состоящую из  $p$  периодически повторяющихся структур. Пусть каждая структура, в свою очередь, состоит из  $q$  слоев. Совокупность  $q$  слоев образует базисный период многослойника. Матрица  $\mathbf{B}$ , описывающая его оптические свойства, определяется как произведение  $q$  матриц интерференции отдельных слоев:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & ib_{12} \\ ib_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^q \begin{pmatrix} \cos \Phi_j & iu_j^{-1} \sin \Phi_j \\ iu_j \sin \Phi_j & \cos \Phi_j \end{pmatrix}.$$

Матрица многослойной системы  $\mathbf{C}$  определяется через матрицу базисного периода  $\mathbf{B}$  следующим образом:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & ic_{12} \\ ic_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{B}^p = \begin{pmatrix} b_{11} & ib_{12} \\ ib_{21} & b_{22} \end{pmatrix}^p. \quad (84)$$

Число  $p$  часто называют параметром кратности периода многослойника.

Из теории матриц известно, что матричные элементы  $c_{ij}$  можно представить через матричные элементы  $b_{ij}$  с помощью полиномов Чебышева [30]:



$$\begin{aligned}c_{11} &= b_{11}S_{p-1}(x) - S_{p-2}(x); \\c_{12} &= b_{12}S_{p-1}(x); \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned}c_{21} &= b_{21}S_{p-1}(x); \\c_{22} &= b_{22}S_{p-1}(x) - S_{p-2}(x),\end{aligned}$$

где  $S_p(x)$  — полиномы Чебышева второго рода, определяемые соотношениями

$$S_p(x) = \frac{\sin[(p+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}},$$

а аргумент  $x$  вычисляется по формуле

$$x = \frac{b_{11} + b_{22}}{2}.$$

Полиномы  $S_p(x)$  определяют с помощью следующего рекуррентного соотношения:

$$S_p(x) = 2xS_{p-1}(x) - S_{p-2}(x)$$

и двух первых полиномов  $S_0(x) = 1$  и  $S_1(x) = 2x$ .

Таким образом, матричные элементы многослойной системы можно выразить через матричные элементы базисного периода и стандартные нормированные полиномы Чебышева. Элементы  $c_{ij}$  удобно записать в более компактной форме, полагая

$$x = \cos \alpha. \quad (86)$$

Тогда

$$\begin{aligned}c_{11} &= \cos p\alpha + \frac{b_{11} - b_{22}}{2} \frac{\sin p\alpha}{\sin \alpha}; \\c_{12} &= b_{12} \frac{\sin p\alpha}{\sin \alpha}; \\c_{21} &= b_{21} \frac{\sin p\alpha}{\sin \alpha}; \\c_{22} &= \cos p\alpha - \frac{b_{11} - b_{22}}{2} \frac{\sin p\alpha}{\sin \alpha}.\end{aligned} \quad (87)$$

Коэффициенты отражения и пропускания периодической многослойной системы можно вычислить, подставив матричные элементы (85) или (87) в формулы (78) и (79).

Представление аргумента в виде полинома Чебышева позволяет без проведения трудоемких расчетов выявить общие закономерности поведения спектральных зависимостей коэффициентов отражения или пропускания периодических многослойных систем. Действитель-

но, значения элементов  $c_{ij}$  в соотношениях (87) определяются значениями полинома  $S_p(x)$ , так как с учетом выражения (86) полином  $S_p(x)$  можно записать в виде

$$S_p(x) = \sin(p+1)\alpha / \sin \alpha \text{ при } |x| \leq 1; \quad (88)$$

$$S_p(x) = \operatorname{sh}(p+1)\alpha / \operatorname{sh} \alpha \text{ при } |x| > 1. \quad (89)$$

Рассмотрим отдельно случаи, соответствующие этим соотношениям.

При  $|x| \leq 1$  функция (88) монотонно осциллирует с увеличением  $\alpha$ . Это означает, что коэффициенты отражения или пропускания многослойной системы монотонно изменяются между некоторыми максимальными и минимальными значениями, которые не зависят от параметра кратности периода  $p$ . Поскольку абсолютные значения коэффициентов пропускания близки к единице, то спектральные области, для которых выполняется условие (88), получили название полос пропускания (или полос малого отражения). Экстремальные значения коэффициентов отражения или пропускания ограничиваются огибающими. Для получения уравнений огибающих следует продифференцировать уравнения (78) или (79) по параметру кратности  $p$  и полученные выражения приравнять нулю. В результате этих вычислений получатся значения  $p_1$  и  $p_2$ , дающие экстремумы коэффициента отражения. Окончательно уравнения для определения  $p_1$  и  $p_2$  имеют вид [39]

$$\operatorname{tg} 2p_1 \alpha = \operatorname{tg} (2p_2 \alpha + \pi) = N/D, \quad (90)$$

где

$$N = \frac{2}{\sin \alpha} \left[ \frac{(b_{11} - b_{22})(n_p^2 - n_0^2)}{2} - \kappa_p (n_0^2 b_{12} - b_{21}) + \frac{\kappa_p^2 (b_{11} - b_{22})}{2} \right];$$

$$D = (n_p^2 + n_0^2) \left[ \frac{(b_{11} - b_{22})^2}{4 \sin^2 \alpha} - 1 \right] + n_0^2 n_p^2 \frac{b_{12}^2}{\sin^2 \alpha} +$$

$$+ \frac{b_{21}^2}{\sin^2 \alpha} + \frac{\kappa_p (b_{11} - b_{22})}{\sin^2 \alpha} (n_0^2 b_{12} + b_{21}) + \kappa_p^2 \left[ n_0^2 \frac{b_{12}^2}{\sin^2 \alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{(b_{11} - b_{22})^2}{4 \sin^2 \alpha} - 1 \right].$$

При выводе уравнений (90) предполагалось, что одна из ограничивающих многослойную периодическую систему сред (подложка) описывается комплексным показателем преломления  $N_{\pi} = n_{\pi} - i\kappa_{\pi}$ .

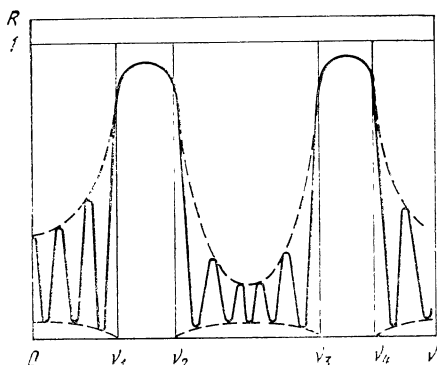


Рис. 8. Спектральная зависимость коэффициента отражения многослойной периодической системы

В общем случае уравнения огибающих имеют сложный вид. Однако для многих практически важных случаев уравнения (90) существенно упрощаются. Например, это имеет место, когда подложка свободна от поглощения или когда

диагональные элементы базисного периода равны.

Существенное упрощение уравнений огибающих достигается также в том случае, когда показатели преломления окружающих сред одинаковы. Использование уравнений огибающих упрощает анализ многослойных систем.

Рассмотрим теперь случай, когда  $|x| > 1$ . В соответствии с формулой (89) значение полинома  $S_p(x)$  возрастает с ростом  $p$ . При этом увеличиваются значения матричных элементов  $c_{ij}$  и, следовательно, уменьшается коэффициент пропускания многослойной периодической системы. Спектральные области, для которых  $|x| > 1$ , называются полосами заграждения или высокого отражения.

Спектральная зависимость коэффициента отражения периодической многослойной системы схематически показана на рис. 8, где штриховой линией обозначены огибающие экстремумов коэффициента отражения в полосах пропускания. В интервале  $\nu_1 \leq \nu \leq \nu_2$  и  $\nu_3 \leq \nu \leq \nu_4$  расположены полосы заграждения.

В качестве примера рассмотрим периодическую многослойную систему, состоящую из чередующихся слоев с высоким  $n_B$  и низким  $n_H$  показателями преломления равной оптической толщины. Матрица базисного периода в этом случае имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & ib_{12} \\ ib_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \Phi - \frac{n_H}{n_B} \sin^2 \Phi & i \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n_B} + \frac{1}{n_H} \right) \sin 2\Phi \\ i \frac{1}{2} (n_B + n_H) \sin 2\Phi & \cos^2 \Phi - \frac{n_B}{n_H} \sin^2 \Phi \end{pmatrix} \quad (91)$$

и

$$x = \cos^2 \Phi - \frac{1}{2} \left( \frac{n_B}{n_H} + \frac{n_H}{n_B} \right) \sin^2 \Phi. \quad (92)$$

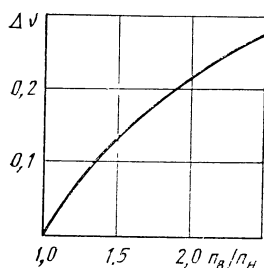


Рис. 9. Зависимость полуширины полосы заграждения периодической системы от отношения  $n_B/n_H$

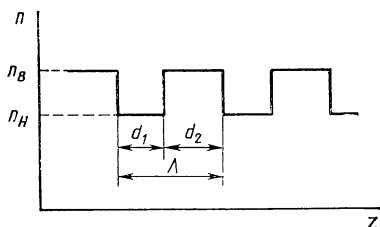


Рис. 10. Структура периодической двухкомпонентной системы

С помощью соотношения (92) можно определить спектральную ширину полосы заграждения. С этой целью фазовую толщину слоя  $\Phi$ , соответствующую краю полосы заграждения, обозначим  $\Phi_\Gamma = (2\pi/\lambda_\Gamma)nd$ . Пусть  $\lambda_0$  — длина волны, для которой оптическая толщина слоев равна четверти  $\lambda_0$ . Тогда

$$\Phi_\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda_\Gamma} nd = \frac{2\pi}{\lambda_\Gamma} \frac{\lambda_0}{4} = \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{\lambda_\Gamma} = \frac{\pi}{2} \nu_\Gamma,$$

где  $\nu_\Gamma$  — граничная частота полосы заграждения. Середине полосы заграждения соответствует  $\nu=1$ . Если ввести понятие полуширины полосы заграждения  $\Delta\nu$ , то граничные частоты, соответствующие краям полосы заграждения, равны  $1-\Delta\nu$  и  $1+\Delta\nu$ . Полагая в выражении (92)  $x=-1$  и  $\nu=(\pi/2)(1-\Delta\nu)$ , получим окончательное выражение:

$$\Delta\nu = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{n_B - n_H}{n_B + n_H}. \quad (93)$$

Из формулы (93) следует, что с ростом отношения  $n_B/n_H$  полуширина полосы заграждения многослойной периодической системы монотонно увеличивается (рис. 9).

Максимальное значение коэффициента отражения  $R_{\max}$  достигается, когда фазовая толщина слоев  $\Phi = \pi/2$ . Матрица интерференции многослойной периодической системы  $C$  в этом случае принимает вид

$$C = B^p = \begin{pmatrix} (-n_H/n_B)^p & 0 \\ 0 & (-n_B/n_H)^p \end{pmatrix}. \quad (94)$$

Подставляя матричные элементы  $c_{ij}$  из (94) в формулу (78), получим

$$R_{\max} = \left[ \frac{1 - \frac{n_{\Pi}}{n_0} \left( \frac{n_B}{n_H} \right)^{2p}}{1 + \frac{n_{\Pi}}{n_0} \left( \frac{n_B}{n_H} \right)^{2p}} \right]^2. \quad (95)$$

Из этой формулы видно, что коэффициент отражения периодической системы увеличивается с ростом числа слоев. Для частного случая, когда периодическая система ограничивается слоями с показателем преломления  $n_B$ , максимальный коэффициент отражения описывается выражением

$$R_{\max} = \left[ \frac{1 - \frac{n_B^2}{n_0 n_{\Pi}} \left( \frac{n_B}{n_H} \right)^{2p}}{1 + \frac{n_B^2}{n_0 n_{\Pi}} \left( \frac{n_B}{n_H} \right)^{2p}} \right]^2. \quad (96)$$

Заметим, что полученные формулы (93), (95) и (96) остаются справедливыми при замене показателей преломления их эффективными значениями (46).

Расчет оптических характеристик многослойных периодических систем с различной структурой предполагает обязательное вычисление матричных элементов в каждом конкретном случае. Однако в случае, когда число периодов велико ( $p \rightarrow \infty$ ), для анализа интерференционной структуры можно использовать дисперсионное уравнение.

Для иллюстрации этого подхода рассмотрим бесконечную периодическую систему, состоящую из слоев с чередующимися высоким  $n_B$  и низким  $n_H$  показателями преломления и оптическими толщинами  $n_B d_1$  и  $n_H d_2$  (рис. 10).

В соответствии с уравнением (4) для вектора электрического поля электромагнитной волны, распространяющейся нормально границам раздела, запишем [26]

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2 n_B E_x = 0, \quad z \in d_1; \quad (97)$$

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2 n_H E_x = 0, \quad z \in d_2. \quad (98)$$

Предположим, что для любого  $z$  справедливо относительно  $E$  следующее решение:

$$E = u(z) e^{-ihz}, \quad (99)$$

где  $u(z)$  — периодическая функция с периодом  $\Lambda = d_1 + d_2$ , т. е.  $u(z) = u(z + \Lambda)$ , а  $h$  — волновое число для волны, распространяющейся в периодической системе (постоянная распространения).

В то же время, решения уравнений (97) и (98) можно записать в форме

$$E = A e^{i k n_B z} + B e^{-i k n_B z}, \quad z \in d_1;$$

$$E = C e^{i k n_H z} + D e^{-i k n_H z}, \quad z \in d_2.$$

Тогда для  $u(z)$  получим следующие решения:

$$u(z) = A e^{i(h + k n_B)z} + B e^{i(h - k n_B)z}, \quad z \in d_1;$$

$$u(z) = C e^{i(h + k n_H)z} + D e^{i(h - k n_H)z}, \quad z \in d_2.$$

Из условия непрерывности напряженности поля и ее производной на границах раздела сред, а также условия периодичности, следует

$$u(-0) = u(+0); \quad u'(-0) = u'(+0);$$

$$u(d_1 - 0) = u(-d_2 + 0); \quad u'(d_1 - 0) = u'(-d_2 + 0).$$

Последние соотношения представляют собой линейную систему уравнений для определения коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Условием совместности этой системы уравнений является равенство нулю определителя вида

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ n_B & -n_B & n_H & -n_H \\ e^{i(h + k n_B)d_1} & e^{i(h - k n_B)d_1} & e^{-i(h + k n_H)d_2} & e^{-i(h - k n_H)d_2} \\ n_B e^{i(h + k n_B)d_1} & -n_B e^{i(h - k n_B)d_1} & n_H e^{-i(h + k n_H)d_2} & -n_H e^{-i(h - k n_H)d_2} \end{vmatrix}$$

Раскрывая определитель, получим следующее дисперсионное уравнение для  $h$ :

$$\begin{aligned} \cos h\Lambda &= \frac{(n_B + n_H)^2}{4n_B n_H} \cos k(n_B d_1 + n_H d_2) - \\ &- \frac{(n_B - n_H)^2}{4n_B n_H} \cos k(n_B d_1 - n_H d_2). \end{aligned} \quad (100)$$

Рассмотрим случай, когда период многослойной структуры сравним с длиной волны падающего излучения. Электромагнитная волна не будет распространяться в слоистой системе (реализуется полоса заграждения), если постоянная распространения является мнимой величиной, т. е. при  $\cos k\Lambda > 1$ . Это условие выполняется, когда

$$\cos k (n_B d_1 + n_H d_2) = \pm 1,$$

а

$$\cos k (n_B d_1 - n_H d_2) \neq \cos k (n_B d_1 + n_H d_2),$$

так как

$$\frac{(n_B + n_H)^2}{4n_B n_H} - \frac{(n_B - n_H)^2}{4n_B n_H} = 1.$$

Отсюда следует, что

$$k (n_B d_1 + n_H d_2) = l\pi, \quad l = 1, 2, \dots; \quad (101)$$

$$k (n_B d_1 + n_H d_2) \neq k (n_B d_1 - n_H d_2) + 2q\pi, \quad q = 1, 2, \dots \quad (102)$$

Условие (102) эквивалентно неравенству

$$kn_H d_2 \neq q\pi. \quad (103)$$

Из соотношения (101) и (103) следует, что электромагнитные волны с длиной  $\lambda_l = 2(n_B d_1 + n_H d_2)/l$  будут распространяться в слоистой среде только при  $\lambda_l = 2n_H d_2/q$ . В этом случае величина  $pn_H d_2/(n_B d_1 + n_H d_2)$  является целым числом, равным  $q$ .

В качестве примера определим спектральное положение полос заграждения в слоистой системе, у которой отношение оптической толщины слоев  $n_B d_1/n_H d_2 = 2$ . Из выражений (101) и (103) следует, что на длинах волн  $\lambda_l = 6n_B d_1/l$  возникают полосы заграждения, кроме тех значений  $\lambda$ , которые соответствуют  $\lambda_q = 4n_B d_1/q$ . Таким образом, полосы заграждения реализуются на следующих длинах волн:  $\lambda_1, \lambda_1/2, \lambda_1/4, \lambda_1/5, \lambda_1/7, \lambda_1/8 \dots$  Им соответствуют, если положить  $\nu_1 = 1$ , относительные частоты 1, 2, 4, 5, 7, 8... (рис. 11).

С помощью дисперсионного уравнения нетрудно оценить спектральную ширину полосы заграждения. На длине волны  $\lambda_{l\Gamma}$ , соответствующей центру  $l$ -й полосы заграждения, оптические толщины слоев  $n_B d_1$  и  $n_H d_1$  равны соответственно  $c_{1l} \lambda_{l\Gamma}$  и  $c_{2l} \lambda_{l\Gamma}$ . Величины  $C_{1l}$  и  $C_{2l}$  полагаются известными. Тогда края  $l$ -й полосы заграждения будут соответствовать граничным значениям нормированной частоты  $\nu_{l\Gamma} + \Delta\nu_l$  и  $\nu_{l\Gamma} - \Delta\nu_l$ , где  $\Delta\nu_l$  — полуширина  $l$ -й полосы заграждения.

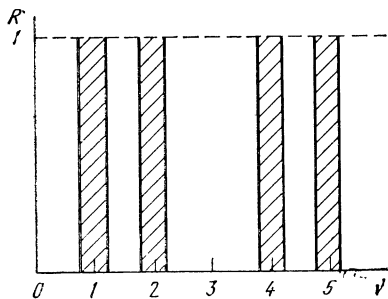


Рис. 11. Схема расположения полос заграждения периодической двухкомпонентной системы с отношением оптических толщин слоев  $n_2 d_2/n_1 d_1 = 2$

Полагая, что  $\cosh \Lambda = -1$ , и подставляя в правую часть уравнения (100) указанные выше значения оптических толщин слоев, получим

$$\begin{aligned} & \frac{(n_B + n_H)^2}{4n_B n_H} \cos 2\pi (v_{l\Gamma} - \Delta v_l) (c_{1l} + c_{2l}) - \\ & - \frac{(n_B - n_H)^2}{4n_B n_H} \cos 2\pi (v_{l\Gamma} - \Delta v_l) (c_{1l} - c_{2l}) = -1. \end{aligned} \quad (104)$$

Из уравнения (104) можно вычислить полуширину  $l$ -й полосы заграждения. Например, если  $v_{l\Gamma} = 1$  и  $c_{11} = c_{22} = 1/4$  (т. е. для полосы заграждения первого порядка слоистой системы, состоящей из чередующихся слоев с высоким  $n_B$  и низким  $n_H$  показателями преломления с оптической толщиной, равной четверти длины волны), получается формула (93), выведенная ранее, исходя из выражений для матричных элементов базисного периода.

Таким образом, с помощью дисперсионного уравнения в некоторых случаях можно определить основные свойства периодической многослойной системы без проведения трудоемких расчетов. Однако, справедливости ради, следует отметить, что для более сложных периодических систем анализ дисперсионного уравнения становится затруднительным из-за громоздкости математических выражений.

## ГЛАВА 2

# КОНСТРУИРОВАНИЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ПОКРЫТИЙ

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ПОКРЫТИЙ И ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Приведенные в гл. 1 формулы позволяют однозначно решать только прямую задачу — задачу расчета характеристик многослойного покрытия с известной структурой. Однако для практики наибольший интерес представляет решение обратной задачи — задачи синтеза покрытий. В общем случае задача синтеза заключается в определении структуры покрытия (т. е. числа слоев и их параметров), обеспечивающего получение требуемой характеристики с заданной точностью при ряде ограничений, накладываемых на значения показателей преломления и толщин слоев. Оптические параметры окружающих сред, как правило, бывают известными.

Решение задачи синтеза оптических покрытий сопряжено со значительными трудностями, характерными для обратных задач, вследствие отсутствия строго последовательных методов их решения.



Задачу синтеза не удастся сформулировать с помощью матричных уравнений, как это сделано для прямой задачи. Этим обстоятельством объясняется существование большого числа различных методов конструирования, ориентированных главным образом на решение частных задач.

Рассмотрим основные черты и области применения некоторых методов, наиболее часто применяемых при конструировании покрытий.

Среди аналитических методов синтеза покрытий значительный теоретический интерес представляют исследования П. Г. Карда [14]. Разработанный автором оригинальный матричный метод расчета спектральных характеристик позволил при некоторых приближениях получить удобные для решения задачи синтеза математические выражения. Это дало возможность решить ряд задач по конструированию широкополосных просветляющих и светоделительных покрытий с небольшим числом слоев. Свойственные методу интересные возможности линеаризации математических выражений, определяющих зависимости спектральных характеристик от конструктивных параметров покрытия, позволяют успешно использовать хорошо разработанные методы линейного программирования.

Большую группу близких по характеру допущений, направленных на упрощение анализа слоистой системы, образуют методы, основанные на аппроксимации спектральной характеристики покрытия различными полиномами, которые «подгоняют» под требуемую характеристику [33, 42]. В основе таких методов лежит представление отношений амплитудных или энергетических коэффициентов отражения и пропускания  $r/t$ ,  $R/T$ ,  $1/t$  и других, в форме полиномов  $m$ -го порядка по тригонометрическим функциям от фазовой толщины слоев. При этом коэффициенты полиномов выражаются через показатели преломления слоев и окружающих сред. Для упрощения задачи обычно полагают, что покрытие состоит из непоглощающих слоев равной оптической толщины. Задача синтеза в этом случае заключается в определении показателей преломления слоев, позволяющих наилучшим образом в смысле некоторого критерия (обычно среднего квадратического) приблизиться к заданной спектральной характеристике.

Однако при конструировании конкретных покрытий не всегда удается учесть ограничения на значения показателей преломления слоев, в результате чего рассчитанные конструкции часто оказываются непригодными для практической реализации. Кроме того, при увеличении числа слоев в покрытии возрастает порядок полиномов, и расчеты становятся чрезвычайно громоздкими. Поэтому при решении конкретных задач оправданы различные приемы, направленные на упрощение математического описания слоистой системы. Один из

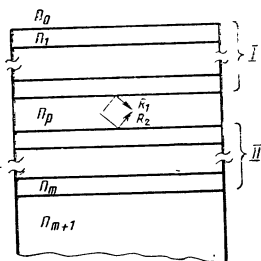
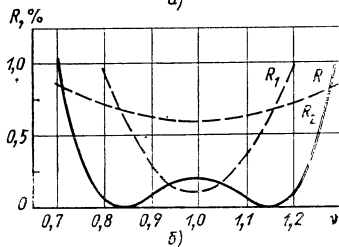
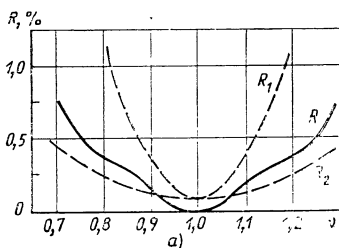


Рис. 12. Модель для конструирования покрытий методом эффективных границ

Рис. 13. Спектральные зависимости коэффициента отражения просветляющего покрытия, сконструированного с помощью метода эффективных границ ( $n_0=1$ ;  $n_1=1,38$ ;  $n_2=2,20$ ;  $n_4=1,52$ ):

$a - n_3=1,71$ ;  $b - n_3=1,62$



таких приемов основан на введении понятия эквивалентного показателя преломления. Согласно представлению об эквивалентности, для фиксированной длины волны оказывается возможным любую комбинацию пленок представить в виде эквивалентного двухслойного покрытия, а симметричную систему — в виде однослойного покрытия с показателем преломления  $N_E$  и физовой толщиной  $\Phi_E$  [44].

Сведение многослойной симметричной комбинации пленок к однослойному покрытию значительно упрощает анализ свойств многослойной системы. Метод эквивалентных слоев особенно хорошо зарекомендовал себя при конструировании фильтрующих и поляризующих покрытий. В следующем параграфе настоящей главы подробно рассмотрим теорию этого метода и проиллюстрируем его возможности при конструировании конкретных покрытий.

Другой специальный метод конструирования оптических покрытий базируется на анализе модели фильтра Фабри—Перо, в простейшем случае состоящем из двух отражателей, между которыми помещен разделительный слой с показателем преломления  $n_p$  и оптической толщиной  $n_p d = l(\lambda/2)$ ,  $l=1, 2, \dots$  (рис. 12). Отражателями могут служить как отдельные слои, так и многослойные системы. В качестве второго отражателя, в принципе, может служить подложка без покрытия. Коэффициент пропускания такой структуры определяется формулой [49]

$$T = \frac{T_0}{1 - F \sin^2 \varphi}, \quad (105)$$

где

$$T_0 = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{(1 - \bar{R})^2}; \quad \bar{R} = \sqrt{R_1 R_2};$$

$$F = \frac{4R}{(1 - \bar{R})^2}; \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{\lambda} l - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Здесь через  $R_1$  и  $R_2$  обозначены коэффициенты отражения отражателей, а  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  представляют собой соответствующие  $R_1$  и  $R_2$  фазовые сдвиги, возникающие при отражении волны.

Коэффициенты отражения  $R_1$  и  $R_2$  и, следовательно,  $T_0$  и  $F$  являются функциями длины волны. Коэффициент пропускания системы  $T$  достигает максимального значения  $T_{\max} = T_0$  на длинах волн, для которых выполняется условие  $\varphi = p\pi$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$ , причем, если  $R_1 = R_2$ , то  $T_0 = 1$ . При  $T_0 = 1$  и  $F \ll 1$  значение  $T$  изменяется от 1 до  $1 - F$ . Следовательно, коэффициент отражения системы  $R$  изменяется от 0 до  $F$ . Если  $T_0 \neq 1$ , то  $R$  лежит в пределах от  $R_{\min} = 1 - T_0$  до  $R_{\max} \approx R_{\min} + T_0 F$ . Изменения коэффициентов отражения  $R_1$  и  $R_2$  можно достичь как за счет варьирования показателей преломления, так и за счет подбора толщин слоев покрытия, образующих отражатели.

Первоначально метод был разработан для конструирования узкополосных фильтров, а затем модифицирован для расчетов ахроматических просветляющих покрытий [49]. При конструировании широкополосных просветляющих покрытий в качестве исходной конструкции обычно выбирают покрытие со структурой  $0,25\lambda_0 - 0,50\lambda_0 - 0,25\lambda_0$ . На рис. 13 приведены спектральные зависимости  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R$  с такой структурой на подложке с  $n_4 = 1,52$ .

На рис. 13, а видно, что при выборе  $n_3 = 1,71$  в точке  $v_0 = 1,0$  коэффициенты отражения  $R_1$  и  $R_2$  приблизительно одинаковы. Спектральная характеристика покрытия в данном случае имеет единственный минимум.

При выборе  $n_3 = 1,62$  графики  $R_1(v)$  и  $R_2(v)$  пересекаются в двух точках:  $v_1 = 0,855$  и  $v_2 = 1,145$ , симметричных относительно  $v_0 = 1,0$ . В этом случае зависимость  $R(v)$  имеет два минимума, в которых  $R = 0$  (рис. 13, б), расположенных приблизительно в тех же точках. Строго говоря, эти минимумы располагаются в областях между точками пересечения кривых  $R_1(v)$  и  $R_2(v)$  и точками минимума функции  $|\pi - \varphi|(v)$ . В данном случае  $0,82 \leq v_1 \leq 0,855$  и  $1,145 \leq v_2 \leq 1,18$ . Это связано с тем, что условие согласования фаз

$$\varphi_1 + \varphi_2 - 2\Phi_P = 2l\pi, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

выполняется приближенно ( $\Phi_F$  — фазовая толщина разделительного слоя).

Заметим, что реально условие  $R_1=R_2$  и, следовательно  $R=0$  удается выполнить только для некоторых длин волн. Спектральная ширина области низкого отражения тем больше, чем меньше величина  $\bar{R}$ . Увеличение ширины области низкого отражения обычно достигается за счет увеличения осцилляций спектральной кривой коэффициента отражения.

Определенный интерес для конструирования покрытий представляет метод, основанный на нахождении с помощью преобразования Фурье непрерывного распределения показателя преломления слоя, обеспечивающего получение заданной спектральной характеристики [28, 43]. Особенностью этого метода является то, что он не требует выбора начального приближения. В основу метода положены формулы для расчета коэффициентов отражения и пропускания неоднородного слоя с произвольной зависимостью показателей преломления  $n(x)$ . Здесь  $x$  представляет собой удвоенный оптический путь, проходимый волной, т. е.

$$x = 2 \int_0^z n(u) du,$$

где нижняя граница  $z=0$  и  $z$  — геометрическая координата.

Можно показать, что связь между  $n(x)$  и спектральной зависимостью коэффициента пропускания слоя устанавливается соотношением [28]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{dx} \frac{1}{2n} \exp(ikx) dx = Q(k) \exp[i\varphi(k)]. \quad (106)$$

Здесь  $k$  — волновое число;  $Q(k)$  — функция коэффициента пропускания  $T(k)$ , определяемая, например, следующим образом:

$$Q(k) = \sqrt{\frac{1}{2} (T^{-1} - T)},$$

где  $\varphi(k)$  — произвольная фаза, которая для обеспечения вещественности  $n$  должна быть нечетной функцией  $k$ .

Выполняя обратное преобразование интеграла Фурье (106), можно получить

$$\frac{dn}{dx} \frac{1}{n} = \frac{1}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} Q(k) \exp[i\varphi(k) - kx] dx. \quad (107)$$

Интегрирование выражения (107) позволяет определить зависимость показателя преломления от удвоенного оптического пути.

Эта зависимость реализует заданную спектральную характеристику  $T(k)$ . Дальнейшая процедура синтеза заключается в аппроксимации неоднородного слоя дискретно-слоистым покрытием.

Метод позволяет находить большое число различных решений. Такая гибкость метода обусловлена определенной свободой в выборе фазы и возможностями различной аппроксимации непрерывного профиля показателя преломления слоистой системы. Этот метод оказался плодотворным для расчета покрытий с очень сложными спектральными характеристиками [43]. Однако, по-видимому, он не может быть использован для решения многих задач, в частности для синтеза покрытий с большим поглощением в материале слоев, поляризующих покрытий, а также покрытий, предназначенных для работы в широком диапазоне углов падения излучения. Кроме того, полученные покрытия имеют сложную для практической реализации структуру — различные показатели преломления и толщины слоев и требуют использования дополнительных приемов для упрощения результатов синтеза. Тем не менее, этот метод, как и другие аналитические процедуры конструирования, успешно могут быть использованы для получения нулевого приближения при машинном конструировании покрытий.

Первым методом конструирования покрытий, ориентированным на использование ЭВМ, явился метод коррекции спектральных характеристик. Сущность этого метода состоит в следующем [30, 38]. Пусть для определенности изменение спектральной зависимости коэффициента отражения  $R(\lambda)$  достигается за счет изменения оптических толщин слоев покрытия  $\Delta G_j$ , где  $j = \overline{1, m}$ . Выражение для  $R(\lambda)$  можно представить в виде ряда Тейлора, ограниченного линейным членом

$$R(\lambda_i) = R_0(\lambda_i) + \sum_{j=1}^m a_{ij} \Delta G_j, \quad (108)$$

где  $R_0(\lambda_i)$  — спектральная зависимость коэффициента отражения покрытия, соответствующая выбранному нулевому приближению (индекс  $i$  относится к нумерации длин волн, на которых изменяется коэффициент отражения);  $a_{ij} = \partial R(\lambda_i) / \partial G_j$ . Здесь предполагается, что  $R(\lambda)$  имеет непрерывные частные производные по всем аргументам.

Из выражения (108) можно получить систему уравнений относительно малого приращения толщин слоев  $\Delta G_j$  для малого изменения  $\Delta R(\lambda_i) = R(\lambda_i) - R_0(\lambda_i)$ :

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \Delta G_j - \Delta R(\lambda_i) = 0, \quad i = \overline{1, l}. \quad (109)$$

Система уравнений (109) может быть решена только при  $l=m$ . Если  $l>m$ , как это обычно бывает, то находят минимум следующего выражения:

$$\Psi' = \sum_{i=1}^l \left( \sum_{j=1}^m a_{ij} \Delta G_j - \Delta R(\lambda_i) \right)^2. \quad (110)$$

Для того чтобы минимизировать  $\Psi$ , необходимо частные производные  $\partial \Psi' / \partial \Delta G_j$  приравнять нулю. Это приводит к системе  $m$  уравнений относительно  $m$  неизвестных, которую можно представить в матричной форме

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} \Delta \mathbf{G} = \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{R}, \quad (111)$$

где  $\mathbf{B}$  — матрица размером  $l \times m$ , элементами которой являются частные производные  $a_{ij}$ ;  $\mathbf{B}^T$  — транспонированная матрица  $\mathbf{B}$ ;  $\Delta \mathbf{G}$  и  $\Delta \mathbf{R}$  — векторы-столбцы, элементами которых являются  $\Delta G_j$  и  $\Delta R(\lambda_i)$  соответственно.

Все сказанное выше справедливо лишь для малых значений  $\Delta G_j$ . Поэтому существенно улучшить характеристику покрытия трудно, и успех применения описанной процедуры зависит от выбора исходной конструкции покрытия. Обычно эта процедура выполняется многократно, причем каждый раз в качестве нулевого приближения используется полученное на предыдущем шаге решение. Для ускорения процесса сходимости метода к минимуму иногда вместо функции (110) минимизируют функцию  $\Psi''$ , определяемую выражением [38]

$$\Psi'' = \sum_{i=1}^l \left( \sum_{j=1}^m a_{ij} \Delta G_j - \Delta R(\lambda_i) \right)^2 + p^2 \sum_{j=1}^m q_j \Delta G_j^2,$$

где  $q^2 = \sum_{i=1}^l a_{ij}^2$ ;  $p$  — положительное число. Вычисляя частные

производные  $\partial \Psi'' / \partial \Delta G_j$  и приравняв их нулю, можно получить систему уравнений, аналогичную системе (108):

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} \Delta \mathbf{G} + p^2 \mathbf{Q} \Delta \mathbf{G} = \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{R}, \quad (112)$$

где  $\mathbf{Q}$  — диагональная матрица с элементами  $q_j^2$ .

Скорость сходимости функции  $\Psi''$  к минимуму существенно зависит от выбора параметра  $p$ . При  $p=0$  уравнение (112) переходит в уравнение (111). Если  $p \rightarrow \infty$ , то, как показывает опыт решения конкретных задач, скорость убывания  $\Psi''$  оказывается очень малой. При правильном выборе параметра  $p$  сходимость  $\Psi''$  можно обеспечить за несколько итераций.

Следует заметить, что при многократном решении уравнений (111) или (112) может оказаться, что толщины некоторых слоев будут либо слишком большими, либо слишком маленькими, или даже примут отрицательные значения, поскольку метод не учитывает ограничения на варьируемые параметры. Кроме того, при решении задач большой размерности, т. е. при конструировании покрытий с большим числом слоев, решение уравнений (111) или (112) требует применения численных методов, и соответствующие вычислительные процедуры реализовать не легче, чем оптимизационные алгоритмы.

В основе метода оптимизации параметров лежит предположение о том, что всю совокупность интересующих нас свойств интерференционного покрытия можно охарактеризовать одним числом, зависящим от его конструктивных параметров. Это число называется показателем (функцией) качества или целевой функцией. С помощью показателя качества численно оценивается отклонение требуемой характеристики покрытия от ее приближения. При таком определении показателя качества его наименьшему значению соответствует наилучшее совпадение характеристик. Таким образом, задача синтеза покрытий в данном случае сводится к задаче минимизации некоторой функции, определенной, вообще говоря, на ограниченном множестве конструктивных параметров. Ограниченность множества допустимых значений параметров слоев, очевидно, вытекает из возможности их технологической реализации. Для отыскания минимального значения показателя качества, в принципе, может быть использован какой-либо из известных методов поиска экстремума функции многих переменных. В силу того, что характеристики интерференционного покрытия нелинейным образом зависят от параметров слоев, минимизация показателя качества выполняется методом нелинейного программирования.

Постановка задачи синтеза интерференционных покрытий в виде оптимизационной задачи часто является единственно возможной. В частности, это относится к конструированию покрытий, состоящих из материалов с сильной дисперсией и неоднородностью показателей преломления, работающих при наклонном падении излучения, предназначенных для нанесения на кристаллы с большим значением двулучепреломления или металлические подложки и др. Как показывает опыт решения конкретных задач, в ряде случаев при конструировании просветляющих и светоделительных покрытий оптимизационные методы обнаруживают подавляющие преимущества по сравнению с аналитическими.

Основные трудности, встречающиеся при использовании оптимизационных методов для решения задачи синтеза интерференционных покрытий, связаны в основном с построением адекватного показа-

теля качества, выбором численного метода и оценкой оптимальности полученных результатов. В следующих параграфах этой главы наряду с методом эквивалентного слоя подробно рассматривается метод оптимизации параметров и демонстрируются его возможности при решении некоторых практических задач.

## 2. МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ СЛОЕВ

Метод основан на анализе слоистых систем, состоящих из периодически повторяющихся симметричных комбинаций пленок [44]. К представлению пленочных систем в виде набора эквивалентных слоев можно прийти следующим образом. Известно, что матрица интерференции одиночного слоя имеет равные диагональные элементы, т. е. в формуле (76)  $a_{11}=a_{22}$ . Перемножая две матрицы интерференции слоев с различными показателями преломления **A** и **B**, можно убедиться в том, что матрица произведения **C** имеет неравные диагональные элементы. Однако, если матрицу **C** умножить на матрицу **A**, то оказывается, что матрица **ABA**, так же как и характеристическая матрица одиночного слоя, имеет равные диагональные элементы. Более того, можно показать, что матрица **M**, являющаяся произведением матриц слоев любой симметричной комбинации вида **ABC ... CBA**, обладает этим же свойством, т. е.  $m_{11}=m_{22}$ . Матрице **M** можно придать вид матрицы одиночного слоя, если положить

$$m_1 = \cos \Phi_E \text{ и } i \sin \Phi_E / m_{12} = -i m_{21} / \sin \Phi_E \quad (113)$$

Из соотношений (113) вытекают следующие выражения для эквивалентного показателя преломления  $N_E$  и эквивалентной фазовой толщины  $\Phi_E$ :

$$N_E = + \sqrt{m_{21}/m_{12}}; \quad (114)$$

$$\Phi_E = \arccos m_{11}. \quad (115)$$

В этом случае матрица **M** принимает «стандартный» вид, аналогичный форме (76):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos \Phi_E & i N_E^{-1} \sin \Phi_E \\ i N_E \sin \Phi_E & \cos \Phi_E \end{pmatrix}.$$

Так как элементы матрицы **M** зависят от длины волны, то величины  $N_E$  и  $\Phi_E$  также являются функциями длины волны. Эта зависимость, особенно для многослойных симметричных структур, имеет сложный характер, причем спектральные интервалы, в которых  $N_E$  и  $\Phi_E$  принимают действительные значения, чередуются с областями, где эти величины не являются действительными. Из выражений (114) и (115) следует, что действительные значения  $N_E$  и



$\Phi_E$  имеют место при  $|m_{11}| \leq 1$ . Если  $|m_{11}| > 1$ , то  $N_E$  является чисто мнимой величиной, а  $\Phi_E$  — комплексной. Заметим, что сказанное остается справедливым и в более общем случае для неоднородных слоев. Очевидно, что рассматривать эквивалентные показатели преломления и эквивалентные толщины имеет смысл только в тех спектральных интервалах, где они принимают действительные значения.

Для систем, состоящих из симметричных комбинаций слоев, получен ряд теорем, которые используют при конструировании конкретных покрытий [30]. Доказательства этих теорем нетрудно получить из определений  $N_E$  и  $\Phi_E$ , а также свойств матрицы (76).

**Теорема 1.** Эквивалентный показатель преломления  $N_1$  многослойной структуры с распределением показателя преломления

$n_1 = A_1 \sum_{i=1}^m n(i)$  в  $A$  раз больше эквивалентного показателя преломления  $N_2$  многослойной структуры с распределением

$$n_2 = \sum_{i=1}^m n(i) :$$

$$N_1 \left[ n_1 = A \sum_{i=1}^m n(i) \right] = A N_2 \left[ n_2 = \sum_{i=1}^m n(i) \right].$$

**Теорема 2.** Эквивалентная толщина  $\Phi_1$  многослойной структуры

с распределением  $n_1 = A \sum_{i=1}^m n(i)$  равна эквивалентной толщине  $\Phi_2$

многослойной структуры с распределением  $n_2 = \sum_{i=1}^m n(i) :$

$$\Phi_1 \left[ n_1 = A \sum_{i=1}^m n(i) \right] = \Phi_2 \left[ n_2 = \sum_{i=1}^m n(i) \right].$$

**Теорема 3.** Эквивалентный показатель  $N_1$  многослойной структуры

с  $n_1 = \sum_{i=1}^m n(i)$  равен обратной величине эквивалентного показателя с

$n_2 = 1 / \sum_{i=1}^m n(i) :$

$$N_1 \left[ n_1 = \sum_{i=1}^m n(i) \right] = 1/N_1 \left[ n_2 = 1 / \sum_{i=1}^m n(i) \right].$$

**Теорема 4.** Эквивалентная толщина  $\Phi_1$  многослойной структуры

с  $n_1 = \sum_{i=1}^m n(i)$  равна эквивалентной толщине  $\Phi_2$  многослойника с

$$n_2 = 1 \left| \sum_{i=1}^m n(i) \right|$$

$$\Phi_1 \left[ n_1 = \sum_{i=1}^m n(i) \right] = \Phi_2 \left[ n_2 = 1 \left| \sum_{i=1}^m n(i) \right| \right].$$

Рассмотрим более подробно простейший случай, когда симметричная комбинация состоит из трех слоев, выполненных из материалов с показателями преломления  $n_A$  и  $n_B$  и фазовыми толщинами  $\Phi_A$  и  $\Phi_B$ . Матричные элементы такой системы имеют вид

$$m_{11} = m_{22} = \cos 2\Phi_A \cos \Phi_B - A_0 \sin 2\Phi_A \sin \Phi_E; \quad (116)$$

$$m_{12} = \frac{i}{n_A} [\sin 2\Phi_A \cos \Phi_B + A_0 \cos 2\Phi_A \sin \Phi_B + B_0 \sin \Phi_B]; \quad (117)$$

$$m_{21} = i n_A [\sin 2\Phi_A \cos \Phi_B + A_0 \cos 2\Phi_A \sin \Phi_B - B_0 \sin \Phi_B]. \quad (118)$$

Из соотношений (116)–(118) можно получить выражения для  $N_E$  и  $\Phi_E$ :

$$N_E = n_A \left[ \frac{\sin 2\Phi_A \cos \Phi_B + A_0 \cos 2\Phi_A \sin \Phi_B - B_0 \sin \Phi_B}{\sin 2\Phi_A \cos \Phi_B + A_0 \cos 2\Phi_A \sin \Phi_B + B_0 \sin \Phi_B} \right]^{1/2}; \quad (119)$$

$$\cos \Phi_E = \cos 2\Phi_A \cos \Phi_B - A_0 \sin 2\Phi_A \sin \Phi_B. \quad (120)$$

Здесь приняты обозначения

$$A_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{n_A}{n_B} + \frac{n_B}{n_A} \right); \quad B_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{n_A}{n_B} - \frac{n_B}{n_A} \right).$$

Формулы (119), (120) определяют показатель преломления и фазовую толщину эквивалентной пленки, полученной из трехслойной комбинации при заданных  $n_A$ ,  $n_B$ ,  $\Phi_A$  и  $\Phi_B$ . Для иллюстрации в табл. 1 [50] даны значения  $N_E$  в зависимости от соотношения фазовых толщин, выбора показателей преломления слоев, а также суммарного значения фазовых толщин слоев. Из таблицы, например, следует, что если  $2\Phi_A + \Phi_B = \pi/2$ , то значения  $N_E$  лежат в интервале от  $n_A$  до  $n_B$ .

При конструировании покрытий обычно бывает необходимо по заданным значениям  $N_E$  и  $\Phi_E$  вычислить оптические толщины слоев такой комбинации с заданными показателями преломления  $n_A$  и  $n_B$ . Умножая выражение (116) на (117) и выполняя соответствующие упрощения, можно получить следующее выражение для  $\sin \Phi_B$  [48]:

$$\sin \Phi_B = \frac{n_A/N_E - N_E/n_A}{n_A/n_B - n_B/n_A} \sin \Phi_E. \quad (121)$$

Знак перед  $\sin \Phi_E$  выбирают таким образом, чтобы все действительные значения  $N_E$  были положительными. В этом случае

Таблица 1

Значения эквивалентного показателя преломления  
симметричной трехслойной комбинации

$\Phi_B^\circ$	$2\Phi_A+\Phi_B^\circ$						
	90°		270°				
	$n_A$						
	1,38		2,3		1,38		2,3
	$n_B$						
	2,3		1,38		2,3		1,38
$N_E$							
0	1,38		2,3		1,38		2,3
10	1,514		2,096		1,258		2,52
20	1,657		1,916		1,151		2,758
30	1,8		1,763		1,06		2,995
40	1,938		1,638		0,985		3,222
50	2,061		1,540		0,926		3,426
60	2,162		1,468		0,882		3,598
70	2,238		1,418		0,852		3,726
80	2,283		1,39		0,834		3,806
90	2,3		1,38		0,828		3,833

$$\Phi_B = (-1)^l \arcsin \left[ \left( \frac{n_A/N_E - N_E/n_A}{n_A/n_B - n_B/n_A} \right) \sin \Phi_E \right] + l\pi, \quad (122)$$

где  $l=0, 1, 2, \dots$

Введем следующие обозначения:

$$a = -\frac{1}{2} \left( \frac{n_B}{n_A} + \frac{n_A}{n_B} \right) \sin \Phi_B; \quad b = \cos \Phi_B; \quad c = \sin \Phi_E.$$

Тогда формула (120) принимает вид

$$a \sin 2\Phi_A + b \sin 2\Phi_A = c. \quad (123)$$

Если  $a^2 + b^2 > c^2$  и  $b \neq c$ , то решение тригонометрического уравнения принимает вид

$$\Phi_A = \arctg \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c} + l\pi. \quad (124)$$

В случае, когда  $b = -c$ , уравнение (123) имеет две серии решений:

$$\Phi_A = \arctg(-b/a) + l\pi \text{ и } \Phi_A = \pi/2 + l\pi. \quad (125)$$

Если  $a^2 + b^2 < c^2$ , то уравнение (123), очевидно, не имеет действительных решений. На практике чаще всего используются решения

при  $l=0$ . В этом случае оптические толщины слоев  $\Phi_A$  и  $\Phi_B$  имеют наименьшие значения.

В качестве примера использования формул (121) и (124) для решения задачи синтеза рассмотрим процедуру конструирования ахроматического просветляющего покрытия для стекла К8 с показателем преломления, равным 1,52, типа  $0,25\lambda_0-0,5\lambda_0-0,25\lambda_0$ , у которого  $n_1=1,45$ ;  $n_2=2$  и  $n_3=1,65$  [17].

При конструировании покрытия, состоящего из двух материалов, внутренний слой с  $n_3=1,65$  заменим эквивалентной трехслойной комбинацией с  $n_B=2$  и  $n_H=1,45$ . Как показывает расчет, в данном случае можно использовать комбинации как вида ВНВ, так и вида НВН. Для комбинации вида НВН из формулы (121) находим, что оптическая толщина слоя с высоким показателем преломления при  $l=0$  равна  $0,065\lambda_0$ , а оптическая толщина слоя с низким показателем преломления, определенная из формулы (124), составляет  $0,091\lambda_0$ . Таким образом, слой четвертьволновой толщины с показателем преломления  $n_3=1,65$  заменяется эквивалентной комбинацией

Таблица 2

**Конструктивные параметры ахроматического просветляющего покрытия для стекла с  $n_{\text{п}}=1,52$**

Номер слоя	Показатель преломления	Оптическая толщина в частях $\lambda_0$	Номер кривой на рис. 14
1	1,45	0,25	1
2	2	0,5	
3	1,65	0,25	
1	1,45	0,25	2
2	2	0,5	
3	1,45	0,091	
4	2	0,065	
5	1,45	0,091	
1	1,45	0,25	3
2	2	0,573	
3	1,45	0,101	
4	2	0,073	

Таблица 3

**Конструктивные параметры просветляющего покрытия с минимумами отражения на  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , связанных отношением  $\lambda_1/\lambda_2=2$**

Номер слоя	Показатель преломления	Оптическая толщина в частях $\lambda_0$	Кривая на рис. 15
1	1,52	0,25	а
2	1,74		
3	2		
1	1,45	0,113	б
2	2	0,023	
3	1,45	0,183	
4	2	0,095	
5	1,45	0,076	
6	2	0,25	
1	2	0,043	в
2	1,45	0,162	
3	2	0,131	
4	1,45	0,07	
5	2	0,338	

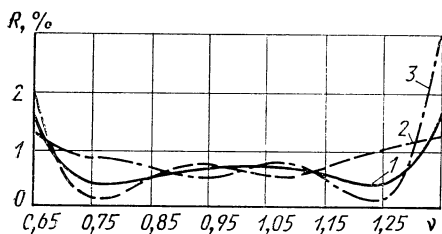


Рис. 14. Спектральные зависимости коэффициента отражения ахроматического просветляющего покрытия (параметры покрытия приведены в табл. 2)

слоев 0,91H0,065B0,091H. Аналогичным образом этот слой можно заменить на комбинацию слоев 0,073B0,101H0,073B.

В табл. 2 приведены конструктивные параметры исходного покрытия и двух его вариантов, а на рис. 14 — соответствующие спектральные характеристики. На рисунке видно, что оба варианта обеспечивают удовлетворительное приближение к характеристике исходной конструкции. Заметим, что полного совпадения спектральных характеристик, по-видимому, добиться невозможно в силу приближенного соответствия симметричной комбинации однослойной пленке (строго оно выполняется только для  $\nu=1$ ).

В качестве другого примера рассмотрим просветляющее покрытие, уменьшающее коэффициент отражения от поверхности стекла с  $n_{m+1}=1,52$  на длинах волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , связанных соотношением  $\lambda_1/\lambda_2=2$ . Исходное покрытие состоит из трех слоев четвертьволновой оптической толщины с  $n_1=1,52$ ;  $n_2=1,74$  и  $n_3=2$  [27]. В этом покрытии заменим первые два слоя симметричными трехслойными комбинациями с  $n_H=1,45$  и  $n_B=2$ . Результаты расчетов сведены в табл. 3. В верхней части таблицы приведены конструктивные параметры исходного покрытия, а в средней и нижней частях — параметры вариантов покрытия, полученные при замене двух первых слоев комбинациями вида HВH и ВВH соответственно. Их спектральные характеристики показаны на рис. 15.

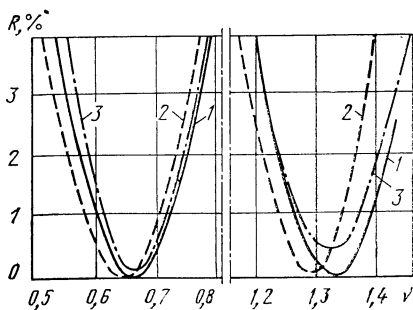


Рис. 15. Спектральные зависимости коэффициента отражения просветляющих покрытий на две длины волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  (параметры покрытий приведены в табл. 3)

На рисунке видно, что исходная конструкция покрытия в точках  $v_1=0,665$  и  $v_2=1,33$  обеспечивает нулевой коэффициент отражения. При использовании комбинации вида ВНВ удастся получить коэффициент отражения на требуемых длинах волн менее 0,5 %. В другом варианте при замене внешних слоев на комбинации вида НВН минимальный коэффициент отражения не превышает 0,1 %. Однако, как видно на рис. 15, спектральная характеристика в этом случае несколько смещается в длинноволновую область спектра, хотя отношение  $\lambda_1/\lambda_2$  остается равным двум.

Приведенные примеры показывают, что замена одиночных слоев на эквивалентные комбинации оказывает сравнительно небольшое влияние на спектральную характеристику даже в достаточно широком диапазоне.

При анализе и синтезе многослойных периодических систем часто используют трехслойные симметричные комбинации с фиксированным отношением оптических толщин слоев. В этих случаях выражения для  $N_E$  и  $\Phi_E$  существенно упрощаются. Например, при выборе  $\Phi=\Phi_B=2\Phi_A$  выражение для эквивалентного показателя преломления принимает вид

$$N_E \left( \frac{A}{2} B \frac{A}{2} \right) = n_A \left( \frac{\cos \Phi - x}{\cos \Phi + x} \right)^{1/2}, \quad (126)$$

где  $x = \frac{1 - n_B/n_A}{1 + n_A/n_B}$ . Круглые скобки у  $N_E$  здесь использованы для обозначения структуры периода.

Выбирая масштабную длину волны  $\lambda_0$  так, чтобы оптическая толщина слоев периода была равна  $0,25\lambda_0$ , можно представить эквивалентный показатель преломления как функцию нормированной длины волны  $v = \lambda_0/\lambda$ . Формулу (126) в этом случае можно представить в виде

$$N_E \left( \frac{A}{2} B \frac{A}{2} \right) = n_A \left( \frac{\cos (\pi/2) v - x}{\cos (\pi/2) v + x} \right)^{1/2}. \quad (127)$$

При этом выражение для определения эквивалентной фазовой толщины записывается следующим образом:

$$\Phi_E \left( \frac{A}{2} B \frac{A}{2} \right) = \frac{\lambda_0}{\pi} \arccos \left[ 1 - \frac{(1 + n_B/n_A)^2}{2n_B/n_A} \sin^2 \frac{\pi}{2} v \right]. \quad (128)$$

На рис. 16 приведены спектральные характеристики системы вида  $\frac{A}{B} B \frac{A}{2}$ ; спектральные области, отмеченные штриховыми линиями, соответствуют мнимым величинам  $N_E$  и комплексным  $\Phi_E$ . На рис. 16,б показаны спектральные зависимости эквивалентного показателя преломления, когда  $n_A > n_B$  и  $n_A < n_B$ . На этом

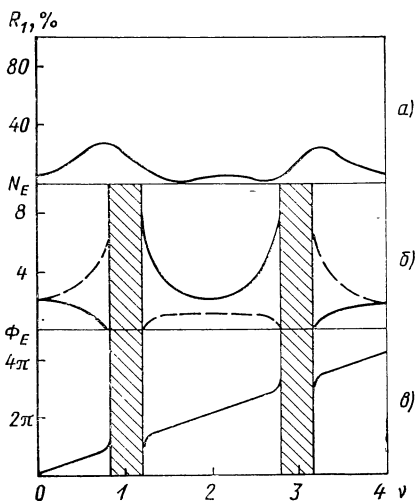


Рис. 16. Спектральные зависимости для трехслойной

комбинации вида  $\frac{A}{2} B \frac{A}{2}$

б) (—  $n_A=2,2$ ;  $n_B=1,45$ ;  
- - -  $n_A=1,45$ ;

$n_B=2,2$ ):

а — коэффициента отражения;  
б — эквивалентного показателя  
в — эквивалентной фазовой толщины

рисунке видно, что кривые сильно отличаются друг от друга. Этим объясняется различие в спектральных характеристиках покрытий, у которых отдельные слои заменены соответствующими эквивалентными комбинациями (см. кривые 2 и 3 на рис. 14 и 15). Из рис. 16, в частности, следует, что система вида  $\frac{A}{2} B \frac{A}{2}$  имеет области загашения в окрестности точек  $\nu=2l+1$ , где  $l=0, 1, \dots$

Заметим, что при изменении порядка чередования показателей преломления слоев в системе из приведенных выше теорем вытекает, что

$$N_E \left( \frac{A}{2} B \frac{A}{2} \right) = \frac{n_A n_B}{N_E \left( \frac{B}{2} A \frac{B}{2} \right)} \quad \text{и} \quad \Phi_E \left( \frac{A}{2} B \frac{A}{2} \right) = \\ = \Phi_E \left( \frac{B}{2} A \frac{B}{2} \right).$$

При выборе фазовой толщины слоев в периоде  $\Phi = \Phi_A = \Phi_B$  формула для расчета эквивалентного показателя преломления записывается следующим образом:

$$N_E(ABA) = n_A \left[ \frac{\cos 2\Phi + (1 + A_0)(1 + B_0)}{\cos 2\Phi + (1 + A_0)(1 - B_0)} \right]^{1/2}, \quad (129)$$

где  $A_0$  и  $B_0$  определяются так же, как и в выражениях (116) — (120).

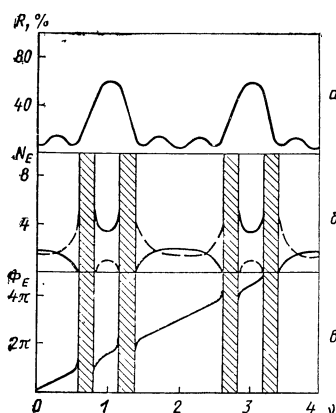


Рис. 17. Спектральные зависимости для трехслойной комбинации вида  $ABA$  ( —  $n_A=2,2$ ;  $n_B=1,45$ ; — — — —  $n_A=1,45$ ;  $n_B=2,2$ ):

$a$  — коэффициента отражения;  $b$  — эквивалентного показателя преломления;  $в$  — эквивалентной фазовой толщины

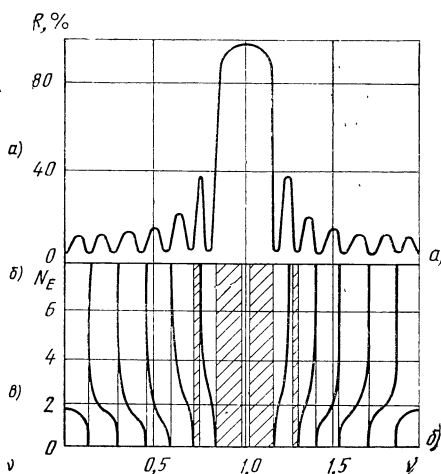


Рис. 18. Спектральные зависимости для системы вида  $ABA \dots A$  ( $n_A=2,2$ ;  $n_B=1,45$ ;  $n_J=1$ ;  $n_{m+1}=1,51$ ;  $m=13$ ):

$a$  — коэффициента отражения;  $b$  — эквивалентного показателя преломления

Спектральные характеристики системы вида  $ABA$  показаны на рис. 17. Так же как и на рис. 16, дисперсионные зависимости  $N_E$  даны для случаев  $n_A > n_B$  и  $n_A < n_B$ . Из рисунка следует, что такая система имеет области загораживания в окрестности точек  $\nu=0,67$ ;  $1,34$ ;  $2,68$ ;  $3,65$  и т. д. Напомним, что расположение областей загораживания и пропускания на спектральной характеристике можно также определить из анализа дисперсионного уравнения (104). Как будет показано в гл. 5, периодическое повторение систем вида  $\frac{A}{2} B \frac{A}{2}$  и  $ABA$  приводит к структурам отрезающих и полосовых фильтров.

Рассмотрим систему, состоящую из слоев с чередующимися высоким и низким показателями преломления  $ABA \dots BA$  (рис. 18). На рисунке видно, что в областях действительных значений  $N_E$  имеет сильную частотную зависимость. Хотя в общем случае выражение для  $N_E$  достаточно сложно, однако для некоторых точек спектрального интервала, важных для конструирования, удастся получить весьма простые формулы. Так, для точек  $\nu=2l+1$ ,  $l=0, 1, 2, \dots$



$$N_E^{(2l+1)}(ABA \dots BA) = n_A (n_A/n_B)^{(m-1)/2}, \quad (130)$$

где  $m$  — число слоев в системе.

В окрестности точек  $v=2l+1$  система вида  $ABA \dots BA$  имеет малое пропускание. В точках спектрального интервала  $v=2l$ , т. е. в центре области пропускания, эквивалентный показатель преломления записывается в виде

$$N_E^{2l}(ABA \dots BA) = \left[ \frac{(k+1)n_A + n_B}{(k+1)/n_A + k/n_B} \right]^{1/2}, \quad (131)$$

где  $k = (m+1)/2$ .

Используя формулы (130) и (131), нетрудно вычислить коэффициенты отражения такой системы. Действительно, эквивалентная фазовая толщина симметричной комбинации слоев в точках  $v=2l+1$  кратна  $\pi/2$ . Тогда по аналогии с формулой (96) коэффициент отражения запишем в виде

$$R = \left( \frac{n_0 n_{m+1} - N_E^2}{n_0 n_{m+1} + N_E^2} \right)^2. \quad (132)$$

Эквивалентная фазовая толщина этой структуры в точках  $v=2l$  кратна  $\pi$ , поэтому коэффициент отражения равен френелевскому отражению от границы между средами с показателем преломления  $n_0$  и  $n_{m+1}$  (30). В окрестности точек  $v=2l$  эквивалентная фазовая толщина представляет собой осциллирующую функцию, изменяющуюся в пределах от  $\pi$  до  $\pi/2$ . Коэффициент отражения при этом лежит между значениями, определяемыми формулами (132) и (30). При периодическом повторении этой системы реализуются структуры пропускающих фильтров. В частности, при  $p=2$  образуется структура узкополосного фильтра, а при  $p>2$  — структура контрастного фильтра.

Симметричные системы, содержащие более трех слоев с различными показателями преломления, редко используют для конструирования покрытий из-за трудно обозримых выражений для эквивалентного показателя преломления. Ряд расчетных формул для систем из трех различных пленочных материалов получен в работе [30]. Преимуществом таких систем является относительно слабая дисперсионная зависимость эквивалентного показателя преломления в широком спектральном диапазоне, что является важным для конструирования многослойных фильтрующих покрытий.

В общем случае для систем с произвольным  $p$  раз повторенным симметричным периодом в соответствии с формулами (86) и (87) можно записать, что  $c_{11} = \cos p\alpha$  и  $b_{11} = \cos \alpha$ , где  $c_{11}$  и  $b_{11}$  — элементы матриц интерференции системы и ее периода. Тогда из определения эквивалентной фазовой толщины вытекает, что эта ве-

личина для базисного периода равна  $\alpha$ , а для системы —  $p\alpha$ . Точно так же можно показать, что эквивалентные показатели преломления базисного периода и системы равны, т. е.

$$N_E = \sqrt{c_{21}/c_{12}} = \sqrt{b_{21}/b_{12}}.$$

Полученные результаты позволяют существенно упростить анализ симметричных периодических систем. Действительно, в частном случае, когда  $n_0 = n_{m+1}$ , коэффициент отражения системы в соответствии с формулой (78) определяется выражением

$$R = \frac{n_0^2 (c_{11} - c_{22})^2 + (n_0^2 c_{12} - c_{21})^2}{n_0^2 (c_{11} + c_{22})^2 + (n_0^2 c_{12} + c_{21})^2}.$$

Уравнения для огибающих в этом случае принимают особенно простой вид:

$$R_1 = 0; \quad R_2 = \left( \frac{n_0^2 - N_E^2}{n_0^2 + N_E^2} \right)^2. \quad (133)$$

Заметим, что уравнение для огибающей симметричной системы в экстремальных точках совпадает с формулой для расчета коэффициента отражения этой системы (132).

В заключение сделаем несколько общих замечаний. Прежде всего метод эквивалентных слоев требует выбора «подходящей» исходной структуры покрытия. Очевидно, что это обстоятельство сужает область поиска и в значительной мере предопределяет результат синтеза. Кроме того, метод является приближенным, так как представление симметричной комбинации в виде эквивалентного слоя для одной длины волны не связано каким-либо систематическим образом с параметрами этого слоя на другой длине волны. Тем не менее метод относительно прост для практического использования, и, кроме того, рассчитанные этим методом конструкции покрытий можно использовать в качестве нулевого приближения для последующей оптимизации на ЭВМ.

### 3. МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИК ПОКРЫТИЙ

Прежде чем приступить к рассмотрению машинных методов синтеза интерференционных покрытий, приведем некоторые сведения из теории оптимизации, которые являются необходимыми для понимания терминологии при обсуждении принципов и методов минимизации функций многих переменных.

**Основные положения.** В общем виде задача оптимизации формулируется следующим образом: требуется минимизировать скалярную функцию  $F$  в области  $D$ , т. е.

$$F(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{x} \in D} F(\mathbf{x}), \quad (134)$$

где  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{2m}]^T$  —  $2m$ -мерный вектор-столбец, определенный в линейном пространстве  $E_{2m}$  (значок  $T$  обозначает операцию транспонирования). Вектор  $\mathbf{x}$  называется вектором конструктивных параметров, координатами которого в нашем случае являются показатели преломления  $n_j$  и толщины слоев  $d_j$  покрытия, т. е.  $\mathbf{x} = [n_1, n_2, \dots, n_m, d_1, d_2, \dots, d_m]^T$ .

Допустимая область  $D \subset E_{2m}$  определяется возможностью практической реализации слоев покрытия. При конструировании интерференционных покрытий к ограничениям относятся верхние и нижние границы интервала изменения показателей преломления и толщин слоев:

$$D = \{ \mathbf{x} \mid n_{j\min} \leq n_j \leq n_{j\max}, \quad d_{j\min} \leq d_j \leq d_{j\max}, \quad j = \overline{1, m} \}. \quad (135)$$

Поскольку в выражении (135) допустимы равенства, то область  $D$  является замкнутой. В противном случае она называется открытой.

Ограничения на показатели преломления слоев связаны с наличием пленкообразующих материалов, которые могут быть использованы при изготовлении покрытий. Например, при конструировании покрытий, предназначенных для работы в видимой и ближней инфракрасной областях спектра, показатели преломления обычно выбирают из условий  $1,38 \leq n_j \leq 2,3$ . Нижнее ограничение на толщины слоев может быть связано с необходимостью получения сплошных пленок на подложках, обладающих микронеровностями поверхности, или с ограничениями по чувствительности используемой контрольно-измерительной аппаратуры. Реально  $d_{j\min}$  составляет 250—300 Å. Верхнее ограничение обычно связано с требованиями механической прочности слоев. Как правило, оптическую толщину слоя редко выбирают больше, чем  $\lambda_0$ . Таким образом, при машинном конструировании покрытий в отличие от аналитических методов ограничения на параметры слоев учитывают уже на этапе формулирования задачи.

Ограничения типа неравенств (135) можно легко исключить из рассмотрения. Для этой цели используют стандартный прием, заключающийся во введении новой переменной  $z$ , которая связана с  $x$  соотношениями вида [3]

$$x_j = x_{j\min} + (x_{j\max} - x_{j\min}) \sin^2 z_j \quad (136a)$$

или

$$x_j = \frac{x_{j\max} z_j^2 + x_{j\min}}{z_j^2 + 1}, \quad j = \overline{1, 2, m}. \quad (136b)$$

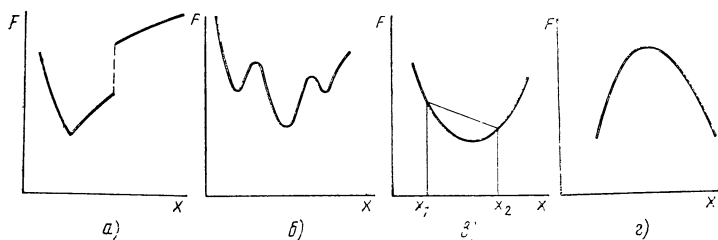


Рис. 19. Примеры функции одной переменной:

*a* — унимодальная; *б* — мультимодальная; *в* — строго выпуклая; *г* — строго вогнутая

Здесь  $x_j \in [x_{j \min}, x_{j \max}]$  при любых значениях  $z_j$ . Такое преобразование переменных приводит задачу (134) к задаче безусловной минимизации.

Каждому значению вектора конструктивных параметров соответствует точка на гиперповерхности функции  $F(x)$ , причем это соответствие является взаимно однозначным. Совокупность параметров слоев покрытия, обеспечивающую минимальное значение функции  $F(x)$ , будем обозначать через  $x^*$ . Значение функции  $F(x^*)$  называется глобальным минимумом, если для всей допустимой области  $D$  выполняется условие  $F(x^*) \leq F(x)$ . Если же это условие выполняется только для некоторой части допустимой области, то  $F(x^*)$  называется локальным минимумом.

Унимодальной называется функция, имеющая единственный минимум в области ее определения (рис. 19, *a*). Мультимодальная функция содержит несколько минимумов, которые могут различаться по абсолютным значениям (рис. 19, *б*).

Функция  $F(x)$ , определенная для всех  $x \in D$ , называется выпуклой, если

$$F[\beta x_1 + (1 - \beta) x_2] \leq \beta F(x_1) + (1 - \beta) F(x_2) \quad (137)$$

для любых  $x_1$  и  $x_2$  и скаляра  $\beta$ , такого, что  $0 \leq \beta \leq 1$ .

Геометрически условие (137) выражает, что для выпуклой функции ее значения лежат ниже прямой, соединяющей точки  $F(x_1)$  и  $F(x_2)$ , взятые на ее поверхности.

Функция  $F(x)$ , для которой при  $0 \leq \beta \leq 1$  неравенство (137) выполняется строго, называется строго выпуклой (рис. 19, *в*). Функция, обратная выпуклой, называется вогнутой (рис. 19, *г*).

Множество  $D$  является выпуклым, если для любой пары точек  $x_1$  и  $x_2$ , принадлежащих этому множеству, отрезок прямой, соединяющий эти точки, также принадлежит этому множеству (рис. 20), т. е.

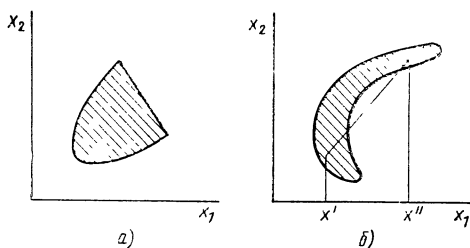


Рис. 20. Примеры функции двух переменных:

а — на выпуклой области; б — на невыпуклой области

$$\mathbf{x} = \beta \mathbf{x}_1 + (1 - \beta) \mathbf{x}_2, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad \mathbf{x} \in D. \quad (138)$$

Предположим, что функция  $F(\bar{\mathbf{x}})$  по крайней мере дважды дифференцируема. Тогда, используя первые три члена ряда Тейлора, ее можно представить в следующем виде:

$$F(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + \nabla^T F(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{H}(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + \dots, \quad (139)$$

где  $\Delta \mathbf{x}$  — вектор приращений;  $\nabla^T F(\mathbf{x})$  — вектор-градиент функции  $F(\mathbf{x})$ , компонентами которого являются первые частные производные

$$\nabla^T F(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_{2m}} \right)^T;$$

$\mathbf{H}(\mathbf{x})$  — действительная симметрическая квадратная матрица размера  $2m \times 2m$ , состоящая из вторых частных производных функции  $F(\mathbf{x})$  (матрица Гессе, или гессиан);

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_{2m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 F(\mathbf{x})}{\partial x_{2m} \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(\mathbf{x})}{\partial x_{2m} \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F(\mathbf{x})}{\partial x_{2m} \partial x_{2m}} \end{vmatrix}.$$

Матрица Гессе играет большую роль при исследовании свойств функций многих переменных. Если  $F(\mathbf{x}^*)$  является минимумом функции  $F(\mathbf{x})$ , то для малого приращения  $\Delta \mathbf{x}$  справедливо неравенство  $F(\mathbf{x}) > F(\mathbf{x}^*)$ . Можно показать, что это условие эквивалентно требованию равенства нулю линейного члена в разложении (139) и положительной определенности квадратичного члена, т. е.

$$\nabla F(\mathbf{x}^*) = 0; \quad \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*) \Delta \mathbf{x} > 0. \quad (140)$$

В этом случае говорят, что гессиан положительно определен. Соотношения (140) выражают необходимое и достаточное условия минимума функции многих переменных.

Для проверки знакоопределенности матрицы  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  обычно используют следующие признаки, которые являются необходимыми и достаточными [32]. Для положительно определенной матрицы главные миноры и детерминант должны быть положительными или, что эквивалентно, должны быть положительными все ее собственные значения. Собственные значения матрицы можно вычислить по стандартным программам, имеющимся в математическом обеспечении всех современных ЭВМ. Забегая вперед, можно отметить, что проверка знакоопределенности гессиана бывает необходимой также при исследовании сходимости итерационной процедуры поиска минимума функции многих переменных. Кроме того, по значению диагональных элементов матрицы Гессе можно судить является ли минимум функции «глубоким» или «мелким», поскольку приращение  $F(\mathbf{x}_i)$  при фиксированных параметрах, кроме  $x_i$ , прямо пропорционально значению диагонального элемента гессиана [34].

При анализе характера минимума функции  $F(\mathbf{x})$  основной интерес представляет вопрос: является этот минимум локальным или глобальным? В общем случае отсутствуют признаки, по которым можно установить глобальность минимума. Однако в частном случае, когда минимизируемая функция и допустимое множество являются выпуклыми, характер минимума определяется теоремой, утверждающей, что всякий локальный минимум выпуклой функции, минимизируемой на выпуклом множестве, одновременно является глобальным [32]. Заметим, что при этом может существовать множество минимумов и все они будут одинаковы. Единственный минимум имеет место для строго выпуклой функции.

Для проверки выпуклости функции может быть использован какой-либо из перечисленных ниже признаков [2, 32] [ $F(\mathbf{x})$  — выпуклая функция  $2m$  переменных]:

1)  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  — положительно определенная матрица для любых  $\mathbf{x} \in E_{2m}$ ;

2)  $F(\mathbf{x}_2) - F(\mathbf{x}_1) \geq (\nabla F(\mathbf{x}), \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$  для любых  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E_{2m}$ ;

3)  $(\nabla F(\mathbf{x} + \beta \mathbf{y}), \mathbf{y})$  — неубывающая функция по  $\beta$ .

Для строго выпуклых функций в области  $D$  матрица Гессе является положительно определенной, что следует из сопоставления выражений (137) и (139). Следовательно, если  $F(\mathbf{x}^*)$  является точкой минимума дифференцируемой выпуклой функции, то условие  $\nabla F(\mathbf{x}^*) = 0$  является необходимым и достаточным.

Справедливости ради следует отметить, что исследование

функции на выпуклость представляет довольно сложную задачу. При анализе функций общего вида свойство выпуклости можно установить только численными методами. При этом часто оказывается, что найти приемлемое с практической точки зрения решение задачи легче, чем исследовать функцию на выпуклость во всей области ее определения.

**Целевая функция.** Рассмотрим смысл и построение функции  $F(x)$ .

Первый шаг при формулировании задачи синтеза оптических покрытий в виде оптимизационной задачи состоит в выборе критерия оптимальности и оценивающей его целевой функции, которые должны объективно отражать требования, предъявляемые к покрытию. При этом предполагается, что экстремальное значение функции полностью характеризует всю совокупность интересующих нас свойств слоистой системы.

Как уже говорилось выше, задача синтеза оптических покрытий заключается в нахождении конструкции слоистой системы с характеристиками, наиболее близкими к требуемым. Другими словами, интерес представляет отклонение характеристики синтезируемого покрытия от заданного уровня. Таким образом, мы сталкиваемся здесь с проблемой определения расстояния между двумя функциями. Хорошо известно, что для этой цели могут быть использованы различные меры близости двух функций [2].

Пусть  $\varphi(t)$  и  $\varphi_0(t)$  две непрерывные функции некоторой обобщенной координаты  $t \in [t_1, t_2]$ . В качестве расстояния между кривыми  $\varphi(t)$  и  $\varphi_0(t)$  можно принять следующее определение:

$$\delta(\varphi, \varphi_0) = \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \omega(t) |\varphi(t) - \varphi_0(t)|^q dt \right\}^{1/q}, \quad (141)$$

где  $q$  — целое положительное число;  $\omega(t)$  — весовая функция.

Для функций, заданных на дискретном множестве, содержащем  $L$  точек, выражение (141) имеет вид

$$\delta(\varphi, \varphi_0) = \left\{ \sum_{i=1}^L \omega(t_i) |\varphi(t_i) - \varphi_0(t_i)|^q \right\}^{1/q}. \quad (142)$$

Функция  $\omega(t)$  и параметр  $q$  в выражениях (141) и (142) используются для того, чтобы подчеркнуть характер близости кривых  $\varphi(t)$  и  $\varphi_0(t)$ . При возрастании  $q$  расстояние  $\delta(\varphi, \varphi_0)$  все в большей степени определяется максимальным расхождением кривых. В пределе при  $q \rightarrow \infty$  [2]

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left\{ \sum_i \omega_i |\varphi_i - \varphi_{0i}|^q \right\}^{1/q} = \max_i \{ \omega_i |\varphi_i - \varphi_{0i}| \}. \quad (143)$$

Рис. 21. Линии равного уровня функции двух переменных, определенных уравнениями типа (144):

*a* — функция  $F_1$ ; *б* — функция  $F_2$ ; *в* — функция  $F_3$

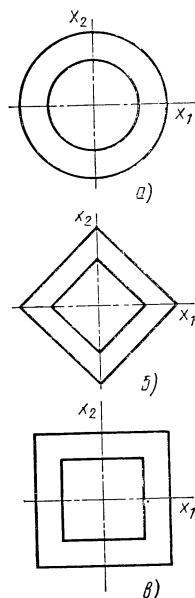
Представление расстояния между функциями в виде выражения (142) называется среднестепенным: при  $q \rightarrow \infty$  оно переходит в минимаксное.

Записанные различным образом целевые функции по-разному оценивают расстояние между кривыми. Проще всего эту разницу показать на примере функции двух переменных. Линии равного уровня функции двух переменных (рис. 21) определяют отклонение  $\varphi(x_1, x_2)$  от  $\varphi_0(x_1, x_2)=0$ , которое можно вычислить с помощью следующих уравнений [2]:

$$F_1(x_1, x_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^2 x_i^2};$$

$$F_2(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^2 |x_i|;$$

$$F_3(x_1, x_2) = \max_{i=1,2} |x_i|.$$
(144)



Изломы линий равного уровня (рис. 21) могут существенно повлиять как на скорость сходимости оптимизационного метода, так и на результат оптимизации. Поэтому при выборе целевой функции необходимо учитывать два момента. Во-первых, задание целевой функции должно адекватно описывать достигаемые решением задачи цели, и, во-вторых, вид графика функции должен соответствовать используемому для минимизации численному методу. К этому вопросу вернемся более подробно при рассмотрении методов многопараметрической минимизации.

Конкретная форма записи целевой функции определяется характером решаемой задачи. При синтезе интерференционных покрытий обобщенной координатой  $t$  служит какая-либо независимая переменная — длина световой волны или угол падения излучения на покрытие, а функциями  $\varphi$  являются энергетические и фазовые характеристики. В частности, для конструирования покрытий, обеспечивающих достижение требуемых значений коэффициента отражения  $R_0(\lambda_i)$  на сетке из  $L$  точек, целевую функцию в соответствии с (142) можно записать в следующем виде:



$$F(\mathbf{x}) = \left\{ \sum_{i=1}^L w(\lambda_i) |R(\mathbf{x}_i, \lambda_i) - R_0(\lambda_i)|^q \right\}^{1/q}, \quad (145)$$

где  $R(\mathbf{x}, \lambda_i)$  — текущая спектральная зависимость коэффициента отражения. При практических расчетах обычно выбирают  $q=2$ . В этом случае представление целевой функции в форме (145) характеризует среднее квадратическое приближение. Заметим, что оптимальное значение целевой функции относительно одних значений  $w(\lambda_i)$  и  $q$  необязательно будет оптимальным относительно других.

Существенной особенностью задачи синтеза покрытий является то, что она в большинстве случаев формулируется как однокритериальная. Если же требуется оптимизировать покрытие одновременно по нескольким частным критериям  $f_i(\mathbf{x})$ , то целевую функцию можно представить в виде линейной комбинации

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^L w_i f_i(\mathbf{x}), \quad w_i \in [0, 1],$$

где  $w_i$  — весовые множители. Если  $w_i=0$ , то значение, которое принимает функция  $f_i(\mathbf{x})$ , не играет роли. При  $w_i=1$  функции  $f_i(\mathbf{x})$  придается максимальное значение. Основная трудность при объединении нескольких частных критериев в один заключается в обоснованном выборе весовых множителей. При случайном выборе  $w_i$  обобщенный критерий  $F(\mathbf{x})$  теряет всякий смысл, а решение задачи полностью обесценивается. Заметим, что задачи, связанные с объединением нескольких критериев в один, возникают при конструировании покрытий, работающих при наклонном падении излучения, в частности при синтезе поляризующих покрытий.

**Методы решения экстремальной задачи.** Поскольку характеристики интерференционного покрытия нелинейным образом зависят от конструктивных параметров, с вычислительной точки зрения задача (134) — это задача нелинейного программирования. В общем случае ее решение заключается в построении последовательности векторов конструктивных параметров, обеспечивающих монотонное убывание целевой функции:

$$F(\mathbf{x}^0) > F(\mathbf{x}^1) > \dots > F(\mathbf{x}^k) > \dots \quad (146)$$

Процедура поиска минимума нелинейной функции включает несколько этапов (рис. 22). Прежде всего необходимо выбрать нулевое приближение или, другими словами, исходную конструкцию  $\mathbf{x}^0$ . Параметры слоев покрытия, взятого в качестве нулевого приближения, могут быть выбраны произвольными или получены в результате аналитического синтеза. Важно только, чтобы они удовлетворяли ограничениям, налагаемым на их значения. После

Рис. 22. Блок-схема решения экстремальной задачи

того как выбрана исходная конструкция покрытия, проверяется выполнение условий окончания поиска. Если этот критерий не удовлетворяется, то начинается непосредственно поиск. Первый этап—определение направления перемещения рабочей точки  $x$  в пространстве варьируемых параметров, а второй этап — выбор сдвига вдоль этого направления. Как правило, решить задачу за один такой цикл (итерацию) не удается. Поэтому поиск повторяется многократно, причем полученный на каждой итерации результат используется в качестве нулевого приближения для последующей итерации. Математически это выражается с помощью следующей итерационной формулы, описывающей переход системы из  $k$ -й точки пространства варьируемых параметров в  $(k+1)$ -ю:

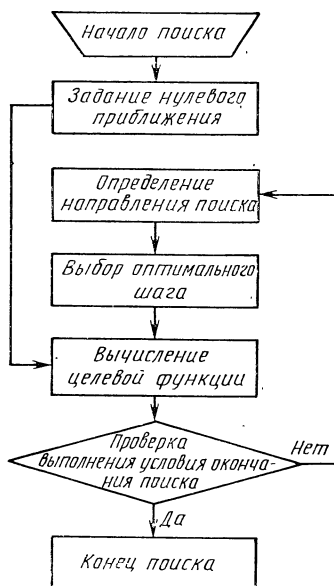
$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k, \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad (147)$$

где вектор  $p^k$  определяет направление перемещения рабочей точки на  $k$ -й итерации, а  $\alpha_k^*$  — неотрицательное значение шага  $\alpha$ , минимизирующего целевую функцию вдоль направления  $p^k$ .

Способы формирования вектора  $p^k$  и определения оптимального шага  $\alpha_k^*$  по существу определяют различные поисковые методы. Выбор  $\alpha_k^*$  и  $p^k$  выполняется в значительной мере независимо, и поэтому имеет смысл рассматривать их отдельно.

1. *Определение оптимального размера шага  $\alpha^*$  (одномерная минимизация).* Большинство поисковых методов включают одномерную минимизацию как подзадачу. Ее цель, как уже указывалось выше, заключается в обеспечении убывания целевой функции в направлении вектора  $p^k$ . В некоторых методах определение  $\alpha^*$  требуется выполнять с большой точностью, в других необходимо лишь зафиксировать убывание целевой функции в направлении  $p^k$ .

В наиболее простом варианте одномерного поиска шаг полагается постоянным. В этом случае после каждого шага проверя-



ется условие монотонного убывания целевой функции. Если минимизируемая функция начинает возрастать, то шаг сокращается путем деления его на некоторую постоянную величину. В качестве критерия окончания линейного поиска может быть выбрано одно из следующих условий: 1) длина шага становится меньше заданного значения; 2) разность между двумя оценками минимизируемой функции оказывается меньше заданной погрешности

$$|F(\alpha_k^i) - F(\alpha_k^{i-1})| < \varepsilon F(\alpha_k^i), \quad (148)$$

где  $\varepsilon$  — малое число, определяющее точность одномерного поиска. Скорость нахождения минимума  $\alpha_k^*$  в значительной мере определяет быстрдействие всего поискового алгоритма. Наиболее эффективным и распространенным является метод, в котором величина  $\alpha_k^*$  определяется из решения следующей задачи:

$$F(x^k + \alpha_k^* p^k) = \min F(x^k + \alpha_k p^k). \quad (149)$$

В общем случае решение этой задачи включает два этапа:

определение интервала (неопределенности), содержащего локальный минимум функции  $F(\alpha)$ ;

сокращение этого интервала с целью нахождения точки минимума  $\alpha_k^*$  с заданной точностью.

На этапе выделения интервала неопределенности предпринимается серия шагов в  $p^k$ -направлении. Длина шага обычно связана с варьируемыми параметрами одним из следующих соотношений:

$$\Delta\alpha_k = \mu_k \|x^k\| \text{ или } \Delta\alpha_k = \mu_k \|p^k\|, \quad (150)$$

где  $\|x\| = \left[ \sum_{j=1}^{2m} x_j^2 \right]^{1/2}$  — евклидова норма вектора  $x$ , а  $\mu_k$  — мас-

штабный множитель, который может быть постоянной или переменной величиной, зависящей от номера итерации.

Значения минимизируемой функции вычисляют в точках

$$\alpha_k^{(1)} = \Delta\alpha_k, \quad \alpha_k^{(2)} = 2\Delta\alpha_k, \quad \dots, \quad \alpha_k^{(i)} = 2i\Delta\alpha_k$$

до тех пор, пока не будет зафиксировано нарушение монотонного убывания функции  $F(\alpha)$ . При этом точки  $\alpha_k^{(i-1)}$  и  $\alpha_k^{(i)}$  обозначают границы интервала неопределенности, содержащего точку  $\alpha_k^*$ .

Ускорения поиска интервала неопределенности можно достичь подбором параметра  $\mu_k$ , позволяющего регулировать длину первоначального шага. Однако если функция  $F(\alpha_k)$  не является унимодальной, то при увеличении  $\mu_k$  может оказаться, что в интервал

неопределенности будет включено несколько минимумов. Если подобная ситуация не предусмотрена в рабочей программе, то неизбежно произойдет аварийный останов. С другой стороны, если значение первоначального шага  $\Delta\alpha_k$  выбрать слишком малым, то это приведет к неоправданному затягиванию вычислительного процесса. Обычно параметр  $\mu_k$  выбирают при решении конкретной задачи путем проведения серии предварительных численных экспериментов.

Для решения второй части задачи — сокращения интервала неопределенности — используют методы интерполяции минимизируемой функции полиномами различного порядка и методы исключения. Оба эти метода требуют унимодальности функции  $F(\alpha_k)$  на интервале неопределенности. Поиск строят таким образом, чтобы происходило последовательное исключение тех подынтервалов, на которых точка минимума  $\alpha_k^*$  отсутствует.

В первом методе, после того, как установлен интервал неопределенности, функцию  $F(\alpha_k)$  аппроксимируют квадратичным или кубическим полиномом. В частности, через три точки:  $F(\alpha_k^{(i-2)})$ ,  $F(\alpha_k^{(i-1)})$  и  $F(\alpha_k^{(i)})$ , полученные на этапе выделения интервала неопределенности, строят параболу, координата минимума которой определяется выражением

$$\alpha_k^{*'} = \frac{1}{2} \frac{(b^2 - c^2) F_a + (c^2 - a^2) F_b + (a^2 - b^2) F_c}{(b - c) F_a + (c - a) F_b + (a - b) F_c},$$

где  $a = \alpha_k^{(i-2)}$ ;  $b = \alpha_k^{(i-1)}$ ;  $c = \alpha_k^{(i)}$ ;  $F_a = F(\alpha_k^{(i-2)})$ ;

$$F_b = F(\alpha_k^{(i-1)}); \quad F_c = F(\alpha_k^{(i)}).$$

Вычисление  $F(\alpha_k^{*'})$  дает оценку локального минимума функции  $F(\alpha_k)$ . Расположение точек  $a$ ,  $b$  и  $c$  показано на рис. 23. Сократить интервал  $[a, c]$  можно на основании одного из следующих отношений:

если  $b > \alpha_k^{*'} и  $F_b > F(\alpha_k^{*'})$ , то  $\alpha_k^{*'} \leq \alpha_k^* \leq b$ ;$

если  $b > \alpha_k^{*'} и  $F_b < F(\alpha_k^{*'})$ , то  $\alpha_k^{*'} \leq \alpha_k^* \leq c$ ;$

если  $b < \alpha_k^{*'} и  $F_b > F(\alpha_k^{*'})$ , то  $b \leq \alpha_k^* \leq c$ ;$

если  $b < \alpha_k^{*'} и  $F_b < F(\alpha_k^{*'})$ , то  $a \leq \alpha_k^* \leq \alpha_k^{*'}$ .$

В соответствии с рис. 23 сокращение интервала неопределенности  $[a, c]$  осуществляется исключением точки  $F_c$ . Далее по точкам  $a$ ,  $\alpha_k^{*'}$  и  $b$  строится новая парабола и вычисляется следующая оценка минимума  $\alpha_k^{*''}$ . Процесс аппроксимации повто-

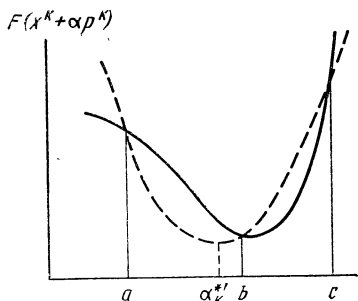


Рис. 23. Схема одномерной минимизации методом квадратичной аппроксимации

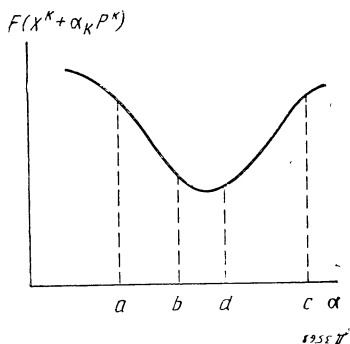


Рис. 24. Схема одномерной минимизации методом золотого сечения

ряется до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность в определении минимума.

Другой весьма эффективный метод сокращения интервала неопределенности основан на его так называемом «золотом сечении» [2]. Согласно этому методу в интервале  $[a, c]$  третья точка располагается так, чтобы разделить его на две неравные части, для которых отношение большей части к меньшей равно отношению длины всего интервала к его большей части (рис. 24):

$$\frac{c-b}{b-a} = \frac{c-a}{c-b} = \tau \approx 1,618.$$

Новую точку  $d$  располагают на отрезке  $[a, c]$ , в свою очередь, таким образом, чтобы снова получить его «золотое сечение»

$$\frac{d-a}{c-d} = \tau.$$

Точка  $d$  заменяет одну из крайних точек. В частности, при  $F(d) \leq F(b)$  отбрасывается точка  $a$ . Новая комбинация точек  $b$ ,  $d$  и  $c$  связана между собой так же, как и точки  $a$ ,  $b$  и  $c$ . После каждого деления интервал неопределенности уменьшается пропорционально величине  $\tau$ . Деление продолжается до тех пор, пока не будет получена оценка локального минимума функции  $F(\alpha^*)$  с требуемой точностью.

Детальное обсуждение этих и некоторых других методов одномерной минимизации, а также вопросов, связанных с особенностями их реализации на ЭВМ, можно найти в книгах [2, 3, 32, 34].

2. Методы построения вектора направлений поиска  $p^k$ . Методы

формирования вектора направлений поиска минимума делят на группы, различающиеся количеством информации о минимизируемой функции, используемой в процессе поиска:

методы нулевого порядка, использующие только численные значения функции;

методы первого порядка, использующие, кроме того, первые производные функции по варьируемым параметрам;

методы второго порядка, требующие дополнительного знания вторых производных функции.

Поисковые методы второй и третьей групп строятся на раз-  
личной аппроксимации минимизируемой функции рядом Тейлора. Для достаточно малых  $\alpha$  разложение функции  $F(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{p})$  в ряд Тейлора, ограниченный линейным членом, имеет вид

$$F(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{p}) \simeq F(\mathbf{x}) + \alpha (\nabla^T F(\mathbf{x}) \mathbf{p}). \quad (151)$$

Из выражения (151) следует, что для обеспечения убывания функции  $F(\mathbf{x})$  необходимо, чтобы линейный член был отрицательным:

$$(\nabla^T F(\mathbf{x}) \mathbf{p}) < 0. \quad (152)$$

Выражение (152), как известно, является определением производной функции  $F(\mathbf{x})$  по направлению вектора  $\mathbf{p}$ . Из него, в частности, следует, что производная функции по направлению максимальна, когда вектор  $\mathbf{p}$  совпадает с градиентом этой функции. Следовательно, для обеспечения наибо́льшего убывания функции вектор  $\mathbf{p}$  должен быть выбран обратным относительно направления, определяемого вектором-градиентом этой функции, т. е. необходимо положить

$$\mathbf{p} = -\nabla F(\mathbf{x}). \quad (153)$$

Обширный класс методов, в которых вектор направления поиска задается формулой (153), получил название градиентных. При практических расчетах обычно используют нормализованный (единичный) градиент. В этом случае итерационная формула (147), описывающая смещение рабочей точки в пространстве варьируемых параметров, принимает следующий вид:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k^* \frac{\nabla F(\mathbf{x}^k)}{\|\nabla F(\mathbf{x}^k)\|}. \quad (154)$$

Таким образом, основная идея градиентных методов заключается в построении линейной аппроксимации целевой функции в окрестности данной точки. Далее, по построенной линейной функции определяется направление ее наискорейшего убывания.

Различные варианты метода, определяемого формулой (154), отличаются только способом выбора шага  $\alpha_k^*$ . В наиболее распространенном варианте градиентных методов — методе наискорейшего спуска положение локального минимума  $F(\alpha_k^*)$  на каждой итерации определяется путем решения задачи одномерной минимизации (149). Отметим, что вариант градиентного спуска, использующий при линейном поиске метод квадратичной аппроксимации, был впервые применен для конструирования покрытий в работе [11].

Работоспособность оптимизационных процедур обычно оценивается при минимизации квадратичной функции вида

$$f(\mathbf{x}) = a + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x}. \quad (155)$$

Для минимизации функции (155) с положительно определенной матрицей  $\mathbf{H}$  методом наискорейшего спуска требуется, вообще говоря, бесконечное число итераций [2]. Характерным для этого метода является то, что все итерации выполняются независимо друг от друга. Можно показать, что приближение рабочей точки к минимуму при использовании метода наискорейшего спуска происходит зигзагообразно. Действительно, градиенты минимизируемой функции, вычисленные в точках  $k$  и  $k+1$ , являются ортогональными, т. е.

$$\nabla^T F(\mathbf{x}^{k+1}) \nabla F(\mathbf{x}^k) = 0.$$

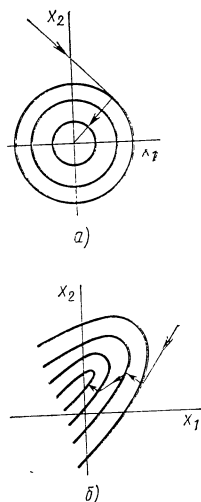
По этой причине скорость сходимости к минимуму в методе наискорейшего спуска в большой степени зависит от графика функции, т. е. от того, насколько постоянна кривизна ее поверхностей равного уровня. Для плохо обусловленных функций<sup>1</sup>, у которых поверхности равного уровня сильно вытянуты в одних координатных направлениях и сжаты в других, метод сходится очень медленно (рис. 25, а, б).

На направление спуска и, следовательно, на скорость сходимости метода можно существенным образом повлиять изменением масштабов варьируемых переменных [34]. Цель этой операции — преобразовать форму поверхности минимизируемой функции так, чтобы она стала возможно ближе к сферической, и тем самым исключить зигзагообразный характер движения рабочей точки.

В вычислительной практике для преобразования формы поверхности минимизируемой функции используют различные приемы. Например, для функции с эллипсоподобными поверхностями равно-

<sup>1</sup> Степень обусловленности функции оценивается по отношению максимального и минимального собственных значений матрицы  $\mathbf{H}$ . Для плохо обусловленных функций это отношение, вычисленное в каждой точке, велико.

Рис. 25. Траектория движения рабочей точки  $\mathbf{x}_k$  при поиске методом градиентного спуска минимума функций двух переменных:  
 а — хорошо обусловленная матрица Гессе; б — плохо обусловленная матрица Гессе



го уровня скорость сходимости метода градиентного спуска может быть существенно увеличена, если реализовать итерации по логарифмам варьируемых параметров. Однако при минимизации функций общего вида подобными рекомендациями воспользоваться удастся далеко не всегда, поскольку форма поверхности, как правило, заранее неизвестна.

Существенного ускорения сходимости градиентных методов к точке минимума можно достичь, используя вторые производные минимизируемой функции, по приведенной выше классификации—это методы третьей группы.

Предположим, что функция  $f(\mathbf{x})$  в окрестности точки  $\mathbf{x}_1$  хорошо аппроксимируется тремя членами ряда Тейлора:

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_1) + \nabla^T f(\mathbf{x}_1) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^T \mathbf{H}(\mathbf{x}_1) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1). \quad (156)$$

Если точка  $\mathbf{x}_1$  является точкой минимума  $\mathbf{x}^*$ , то выражение (156) принимает вид

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*). \quad (157)$$

Отсюда при условии положительной определенности матрицы  $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$  можно найти решение задачи

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} - \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}^*) \nabla f(\mathbf{x}), \quad (158)$$

где  $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}^*)$  — матрица, обратная по отношению к матрице  $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$ , вычисленной в точке  $\mathbf{x}^*$ .

Из выражения (158) следует, что если функция  $f(\mathbf{x})$  квадратичная, т. е. имеет постоянную матрицу Гессе, то ее минимум находится с помощью одной итерации, независимо от выбора нулевого приближения. Для функций общего вида с переменной матрицей Гессе формула (158) описывает итерационный процесс, в котором направление поиска на  $k$ -й итерации определяется вектором  $\mathbf{p}^k = -\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}^k) \nabla F(\mathbf{x}^k)$ .

Основным недостатком алгоритмов, реализующих этот метод (метод Ньютона), является необходимость вычисления матрицы вторых производных минимизируемой функции и нахождения от



нее обратной. Помимо большого общего объема вычислений, связанных с формированием матрицы вторых производных, процедура ее обращения, особенно когда определитель близок к нулю, может оказаться численно неустойчивой. Большой объем вычислений и весьма высокие требования к точности этих вычислений затрудняют реализацию методов второго порядка на ЭВМ средней производительности. Кроме того, условие сходимости метода требует, чтобы нулевое приближение было выбрано из достаточно малой окрестности точки минимума [3]. Очевидно, что этому условию трудно удовлетворить, поскольку положение искомой точки минимума, как правило, неизвестно даже приблизительно.

По этим причинам более перспективными являются численные методы, основанные на аппроксимации матрицы  $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x})$  серией линейных приближений, определяемых в  $\mathbf{H}$ -сопряженных направлениях. Два направления, задаваемых векторами  $\mathbf{p}^k$  и  $\mathbf{p}^{k+1}$ , называются сопряженными относительно матрицы  $\mathbf{H}(\mathbf{x}^k)$ , если  $(\mathbf{p}^{k+1})^T \times \mathbf{H}(\mathbf{x}^k) \mathbf{p}^k = 0$ .

Важность сопряженных направлений при поиске минимума функции многих переменных вытекает из теоремы, утверждающей, что при использовании  $\mathbf{H}$ -сопряженных направлений любая квадратичная функция  $2m$  переменных, имеющая минимум, может быть минимизирована не более чем за  $2m$  итераций. В этом случае говорят, что соответствующие поисковые методы имеют квадратичную сходимость.

Основная ценность поисковых методов, использующих сопряженные направления, состоит в том, что они не требуют вычисления вторых производных минимизируемой функции. Формирование направления поиска на каждой итерации производится только на основании информации о значениях функции и ее производных, вычисленных на предыдущей и текущей итерациях. Таким образом, в отличие от метода наискорейшего спуска, в котором итерации выполняются независимо друг от друга, в методах, использующих сопряженные направления, направление поиска при проведении текущей итерации корректируется в соответствии с информацией, накопленной на предыдущих итерациях. Здесь отметим два класса поисковых методов, использующих сопряженные направления, — методы переменной метрики и сопряженных градиентов.

В методах переменной метрики  $k$ -я итерация складывается из следующих действий [3]:

1) определяется направление поиска по следующей формуле:

$$\mathbf{p}^k = -\mathbf{h}_k \nabla F(\mathbf{x}^k),$$

где  $\mathbf{h}_k \equiv \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)$  —  $k$ -е приближение матрицы обратной матрице Гессе  $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x})$  функции  $F(\mathbf{x}^k)$ ; для  $k=0$   $\mathbf{h}_0 = \mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица;

2) рассчитывается значение шага  $\alpha_k^*$ , обеспечивающего минимум функции  $F(\alpha) = F(\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{p}^k)$ , и вычисляется  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{r}^k$ , где  $\mathbf{r}^k = \alpha_k^* \mathbf{h}_k \nabla F(\mathbf{x}^k)$ ;

3) строится  $(k+1)$ -я оценка матрицы Гессе по какой-либо из следующих рекуррентных формул, предложенных разными авторами:

алгоритм Дэвидона — Флетчера — Пауэлла

$$\mathbf{h}_{k+1} = \mathbf{h}_k + \frac{\mathbf{r}^k (\mathbf{r}^k)^T}{(\mathbf{r}^k)^T \mathbf{Y}^k} + \frac{h_k \mathbf{Y}^k (\mathbf{Y}^k)^T h_k}{(\mathbf{Y}^k)^T h_k \mathbf{Y}^k};$$

алгоритм Гольдфарба

$$\mathbf{h}_{k+1} = \mathbf{h}_k + \left[ \left( 1 + \frac{(\mathbf{Y}^k)^T h_k \mathbf{Y}^k}{(\mathbf{Y}^k)^T \mathbf{r}^k} \right) \mathbf{r}^k (\mathbf{r}^k)^T - \mathbf{r}^k (\mathbf{Y}^k)^T h_k - \right. \\ \left. - h_k \mathbf{Y}^k (\mathbf{r}^k) \right] \frac{1}{(\mathbf{Y}^k)^T \mathbf{r}^k};$$

алгоритм Фиакко — Мак-Кормика

$$h_{k+1} = h_k + (\mathbf{r}^k - h_k \mathbf{Y}^k) [(\mathbf{Y}^k)^T (\mathbf{r}^k - h_k \mathbf{Y}^k)]^{-1} \times \\ \times [(\mathbf{r}^k)^T - (\mathbf{Y}^k)^T h_k];$$

алгоритм Гринстада

$$h_{k+1} = h_k + \left[ \mathbf{r}^k (\mathbf{Y}^k)^T h_k + h_k \mathbf{Y}^k (\mathbf{r}^k)^T - \left( 1 + \frac{(\mathbf{Y}^k)^T \mathbf{r}^k}{(\mathbf{Y}^k)^T h_k \mathbf{Y}^k} \right) \times \right. \\ \left. \times h_k \mathbf{Y}^k (\mathbf{Y}^k)^T h_k \right] \frac{1}{(\mathbf{Y}^k)^T h_k \mathbf{Y}^k}.$$

Здесь принято обозначение  $\mathbf{Y}^k = \nabla F(\mathbf{x}^{k+1}) - \nabla F(\mathbf{x}^k)$ . Последовательность матриц  $\{h\}$  обладает тем свойством, что при минимизации строго выпуклых квадратичных функций сходится к  $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}^*)$  при  $\mathbf{x}^k \rightarrow \mathbf{x}^*$  [34].

Отметим одну трудность, встречающуюся при использовании этих методов на практике. Дело в том, что при минимизации функций общего вида происходит накапливание ошибок вычислений, обусловленных приближенным характером выполнения одномерной минимизации. В свою очередь, это может привести к нарушению положительной определенности матрицы  $\mathbf{h}_k$ , гарантирующей сходимость метода к точке локального минимума. Поэтому в машинных программах, реализующих методы переменной метрики, при появлении отрицательных шагов, т. е. когда  $F(\mathbf{x}^{k+1}) \geq F(\mathbf{x}^k)$ ,

обычно предусматривается возможность замены текущей матрицы направлений единичной.

Методы сопряженных градиентов образуют другой класс методов, характеризующихся квадратичной сходимостью и не требующих вычисления матрицы вторых производных. Основным преимуществом алгоритмов, реализующих этот метод, является то, что они требуют значительно меньшего объема памяти вычислительной машины по сравнению с методами переменной метрики. В методе сопряженных градиентов последовательность направлений поиска строится в виде линейной комбинации текущего антиградиента и предыдущих направлений поиска [32]:

$$\mathbf{p}^{k+1} = -\nabla F(\mathbf{x}^k) + \beta_k \mathbf{p}^k. \quad (159)$$

Скаляр  $\beta_k$  в формуле (159) выбирают так, чтобы сделать векторы  $\mathbf{p}^{k+1}$  и  $\mathbf{p}^k$   $H$ -сопряженными. Известны несколько вычислительных схем метода сопряженных градиентов, различие которых заключается в способе построения коэффициента  $\beta_k$ . По-видимому, наиболее распространенной является схема, предложенная Флетчером и Ривсом [34]. Согласно этому алгоритму коэффициент  $\beta_k$  вычисляется по следующей формуле:

$$\beta_k = \frac{\nabla^T F(\mathbf{x}^k) \nabla F(\mathbf{x}^{k+1})}{\nabla^T F(\mathbf{x}^k) \nabla F(\mathbf{x}^k)}.$$

Другой способ построения коэффициента  $\beta_k$  описан в работе [34] (алгоритм Поллака — Риббьера):

$$\beta_k = \frac{(\mathbf{Y})^T \nabla F(\mathbf{x}^{k+1})}{\nabla^T F(\mathbf{x}^k) F(\mathbf{x}^k)}.$$

Направление поиска при выполнении первой итерации в методе сопряженных градиентов, как и в методе переменной метрики, выбирают совпадающим с антиградиентным. Для ускорения сходимости, а также исключения возможности накопления ошибок вычислений, при практических расчетах рекомендуется периодически через несколько итераций обновлять направление поиска, например заменой текущего направления антиградиентным.

Поисковые методы переменной метрики и сопряженных градиентов сочетают преимущества методов первого и второго порядка. Первая итерация в этих методах выполняется по методу градиентного спуска, тогда как по мере приближения к минимуму изменение функции приобретает все в большей степени квадратичный характер, что обеспечивает сходимость методов за конечное число итераций.

В качестве примера использования градиентных методов рассмотрим задачу синтеза трехслойного ахроматического просветля-

ющего покрытия для стекла с показателем преломления  $n_4=1,51$  со структурой  $0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,25\lambda_0$ .

Математически рассматриваемую задачу можно сформулировать следующим образом: требуется определить значения показателей преломления слоев  $\mathbf{x}^* = [n_1; n_2; n_3]^T$ , обеспечивающих минимальный коэффициент отражения от поверхности стекла с  $n_4=1,51$  в полосе длин волн  $\lambda_1/\lambda_2=1,75$  при условии, что  $1,38 \leq n_j \leq 2,3$  ( $j=\overline{1,3}$ ) и  $G_1=G_3=0,25\lambda_0$ ,  $G_2=0,5\lambda_0$ . Все слои в покрытии считаются однородными, непоглощающими и бездисперсными. Будем искать решение, оптимальное в смысле среднего квадратического отклонения текущего коэффициента отражения от нуля, для чего целевую функцию представим в виде

$$F(\mathbf{x}) = \left[ \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L R^2(\mathbf{x}, \nu_i) \right]^{1/2}, \quad (160)$$

где  $L$  — число точек сетки спектрального интервала  $[\nu_1, \nu_2]$ , в которых вычисляется значение коэффициента отражения. При равномерном разбиении этого интервала с шагом  $\Delta\nu$

$$L = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\Delta\nu} + 1.$$

Число точек сетки  $L$  выбирают таким образом, чтобы оно удовлетворительно «улавливало» изменение спектральной характеристики покрытия. В данном случае целевую функцию вычисляли на сетке из десяти точек, равномерно распределенных на интервале  $[0,73; 1]$ , что обеспечило достаточную для практики точность.

В табл. 4 приведены результаты нескольких итерационных шагов, полученных тремя градиентными методами. В таблице указаны значения показателей преломления слоев, целевой функции (произведено округление до пяти знаков) и число ее оценок, необходимых для выполнения соответствующей итерации. В исходном покрытии показатели преломления всех слоев полагались одинаковыми.

В методах наискорейшего спуска и Дэвидона — Флетчера — Пауэлла одномерная минимизация выполнялась методом квадратичной аппроксимации, а в методе Флетчера — Ривса — методом «золотого сечения». Размер первоначального шага и точность линейного поиска были выбраны одинаковыми:  $\Delta\alpha=0,01$  и  $\epsilon=0,03$ .

Из таблицы видно, что скорость сходимости уменьшается по мере приближения к точке минимума. При этом наглядно проявляются преимущества методов, где используются сопряженные направления, по сравнению с методом наискорейшего спуска.

Таблица 4

Изменение показателей преломления слоев при синтезе покрытия типа  $0,25\lambda_0-0,5\lambda_0-0,25\lambda_0$  градиентными методами

Итерация	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$F(x^k)$ , %	$N$
Метод наискорейшего спуска					
0	1,6	1,6	1,6	5,56226	
1	1,38	1,74802	1,54362	0,61341	16
2	1,38	1,75919	1,57784	0,53565	35
3	1,38	1,79714	1,56174	0,47878	52
4	1,38	1,80527	1,58827	0,43166	67
10	1,38	1,89046	1,60632	0,29636	174
20	1,38	1,85024	1,61825	0,24787	378
33	1,38	1,97666	1,62192	0,23988	626
78	1,38	1,98905	1,62624	0,23883	1581
Алгоритм Дэвидона — Флетчера — Пауэлла					
0	1,6	1,6	1,6	5,56226	
1	1,38	1,74802	1,54362	0,61341	16
2	1,38005	1,76169	1,57927	0,53063	26
3	1,39804	1,93050	1,60975	0,33652	43
4	1,39065	1,96077	1,63815	0,28699	54
10	1,38027	1,99227	1,62419	0,23938	107
12	1,38025	1,99062	1,62648	0,23892	138
Алгоритм Флетчера — Ривса					
0	1,6	1,6	1,6	5,56226	
1	1,38	1,74739	1,54395	0,61312	18
2	1,38	1,75987	1,57756	0,5356	33
3	1,38	1,7985	1,56133	0,47831	45
4	1,38	1,80629	1,58841	0,42954	60
10	1,38	1,88790	1,60711	0,29986	146
20	1,38	1,94921	1,61856	0,24842	277
36	1,38	1,97538	1,62368	0,23999	448

Рассмотрим теперь группу методов решения экстремальной задачи нулевого порядка, в которых используются только значения минимизируемой функции. Соответствующие численные процедуры получили название методов прямого поиска. В этих методах в качестве вектора поиска  $p$  обычно выбирают координатные направления  $i_1, i_2, \dots, i_m, i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_{2m}$ . Наиболее простым методом из этого класса является метод Гаусса — Зайделя [3]. Согласно этому методу вектор конструктивных параметров изменяется последовательно по каждой координате.

Определение оптимального размера шага вдоль  $j$ -го координатного направления осуществляется путем решения задачи одномерной минимизации (149). Полученная в результате минимизации

целевой функции точка  $\mathbf{x}^k$  используется в качестве нулевого приближения для выполнения  $(k+1)$ -й итерации. Момент окончания поиска определяется условием

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| \leq \varepsilon, \quad (161)$$

где  $\varepsilon$  — малое число.

Недостатком этого метода является то, что при минимизации функций, содержащих «овраг», который не ориентирован вдоль какого-либо координатного направления, поиск минимума резко замедляется.

Развитием релаксационного метода явился метод, предложенный Пауэллом [2, 3], в котором процедура Гаусса—Зайделя используется только при выполнении первой итерации. Этот метод предусматривает последовательную замену первоначальных координатных направлений на новые, перспективность которых оценивается по критерию, характеризующему изменение степени сопряженности этих направлений. Рассмотрим этот метод более подробно.

Полученную в результате  $2m$  (по числу варьируемых параметров слоев покрытия) линейных поисков вдоль координатных направлений точку обозначим через  $\mathbf{x}_{2m}$ , а соответствующее ей значение целевой функции через  $F_2$ . Далее, из всех направлений выберем вектор  $\mathbf{s}_i$ , для которого изменение целевой функции оказалось наибольшим:

$$\delta = \max [F(\mathbf{x}_{i-1}) - F(\mathbf{x}_i)], \quad i = \overline{1, 2m}.$$

В качестве нового направления выберем вектор  $\mathbf{s}_{2m+1}$ , проведенный из точки  $\mathbf{x}_0$ , соответствующей началу итерации, в точку  $\mathbf{x}_{2m}$ , полученную в результате ее выполнения, т. е. строим вектор  $\mathbf{s}_{2m+1} = \mathbf{x}_{2m} - \mathbf{x}_0$ . В этом направлении выполняется линейный поиск с целью определения локального минимума  $\alpha_{2m+1}^*$ , после чего вычисляется точка  $\mathbf{x}_{2m+1} = \mathbf{x}_{2m} + \alpha_{2m+1}^* \mathbf{s}_{2m+1}$  и соответствующее ей значение целевой функции  $F_3$ . Это новое направление заменяет предыдущее  $\mathbf{s}_i$ , обеспечивающее наибольшее убывание целевой функции. При этом должно выполняться условие, оценивающее перспективность данного направления [34]:

$$0,5\delta (F_1 - F_3)^2 \geq (F_1 - 2F_2 + F_3) (F_1 - F_2 - \delta)^2,$$

где  $F_1 = F(\mathbf{x}_0)$ . Если это условие не выполняется, то первоначальные направления остаются без изменений. Поиск заканчивается, как только оказывается выполненным критерий (161).

Метод Пауэлла, как и рассмотренные выше методы квадратичной сходимости и сопряженных градиентов, имеет квадратичную сходимость. В табл. 5 приведены результаты решения задачи синтеза трехслойного ахроматического просветляющего покрытия

**Синтез просветляющего покрытия типа  $0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,25\lambda_0$  методом Пауэлла**

Итерация	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$F(x^k)$ , %	$N$
0	1,6	1,6	1,6	5,56226	—
1	1,38123	1,97089	1,61978	0,24556	41
2	1,38127	1,99009	1,62862	0,23989	62
3	1,38	1,98774	1,62554	0,23921	98
4	1,38002	1,98972	1,62604	0,23885	114
5	1,38	1,98992	1,6262	0,23885	149

типа  $0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,25\lambda_0$  с использованием оптимизационной процедуры Пауэлла, в которой линейный поиск выполнялся методом квадратичной аппроксимации.

Хук и Дживс предложили более простой с точки зрения программной реализации метод, не требующий выполнения одномерной минимизации, который известен как метод конфигураций [2, 34]. Этот метод в отличие от рассмотренных выше методов нелинейного программирования не имеет строгого обоснования, однако он оказывается весьма эффективным при минимизации функций, содержащих «овраги». При использовании метода конфигураций удается установить наличие «оврага» на поверхности целевой функции и организовать движение рабочей точки вдоль него.

Стратегия поиска минимума многомерной функции состоит в следующем. На первом этапе с целью определения направления поиска выполняется «исследующий» поиск в окрестности исходной точки  $x^0$ , являющейся первой базисной точкой  $b^1$ .

Для нахождения второй базисной точки выполняется серия «пробных движений»: просматриваются удачные в смысле уменьшения целевой функции шаги по координатным направлениям.

Например, приращение первой координаты привело к увеличению целевой функции по сравнению с ее значением в исходной точке. Тогда полученная точка отвергается, а знак приращения изменяется на противоположный. Если отрицательное приращение также приводит к увеличению целевой функции, то эта координата остается без изменения, и приращение дается следующей координате.

Если изменение координаты приводит к уменьшению функции, то полученная точка сохраняется, и осуществляется переход к следующей координате.

После просмотра всех координат первая серия «пробных движений» завершается, а найденная точка считается второй базисной

точкой  $\mathbf{b}^2$ . Здесь возможны две ситуации: 1)  $F(\mathbf{b}^2) \geq F(\mathbf{b}^1)$ , т. е. проведение «исследующего» поиска не позволило уменьшить значение функции; 2)  $F(\mathbf{b}^2) < F(\mathbf{b}^1)$ , т. е. достигнуто уменьшение функции.

В первом случае длина «пробного шага» — значение приращения координаты уменьшается, и «пробные движения» начинаются снова. Во втором случае в ожидании повторения успеха делается шаг в направлении вектора разности  $\mathbf{b}^2 - \mathbf{b}^1$ :  $\mathbf{b}' = 2\mathbf{b}^2 - \mathbf{b}^1$ .

Для коррекции выбранного направления в окрестности точки  $\mathbf{b}'$  выполняется новая серия «пробных движений», дающая точку  $\mathbf{b}^3$ , которая становится третьей базовой точкой. Если  $F(\mathbf{b}^3) < F(\mathbf{b}^2)$ , то поиск продолжается с тем же шагом в направлении  $\mathbf{b}^3 - \mathbf{b}^2$ , что приводит в точку  $\mathbf{b}'' = 2\mathbf{b}^3 - \mathbf{b}^2$ . В противном случае в окрестности точки  $\mathbf{b}^2$  выполняется серия «пробных движений» и процесс поиска продолжается. Поиск завершается, как только значение приращений по всем координатам станет меньше заданного уровня или окажется исчерпанным лимит машинного времени, отведенного на решение задачи.

Недостаток метода конфигураций заключается в том, что он оказывается неспособным обеспечить уменьшение функции, если ее поверхности равного уровня имеют острые углы. Избежать этого можно, например, перезадаванием нулевого приближения, выбрав его так, чтобы оно находилось достаточно близко от точки, полученной в результате предыдущего поиска. В то же время метод очень нагляден, так как он не требует подбора различных параметров, определяющих работу других алгоритмов, таких как точность выполнения одномерной минимизации, выбор интервала неопределенности и др. В данном методе оба параметра, задаваемых в начале вычислений, — приращение координат вектора конструктивных параметров и критерий окончания поиска — имеют очевидный физический смысл.

В табл. 6 приведена распечатка нескольких шагов, полученных при синтезе рассмотренного выше трехслойного ахроматического покрытия методом конфигураций. Изменение показателей преломления в данном примере началось со слоя, граничащего с подложкой. Значение приращения показателей преломления в течение всего поиска оставалось неизменным и равным 0,01. Из таблицы видно, что для нахождения минимума с заданной точностью потребовалось 105 обращений к процедуре решения задачи анализа.

Все рассмотренные выше численные методы, как градиентные, так и неградиентные, относятся к детерминированным методам, поскольку траектория перемещения рабочей точки в пространстве варьируемых параметров однозначно определяется выбором нуле-



Таблица 6

Изменение показателей преломления слоев при синтезе просветляющего покрытия типа  $0,25\lambda_0-0,5\lambda_0-0,25\lambda_0$  методом Хука—Дживса

Итерация	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$F(x^k)$ , %
0	1,6	1,6	1,60	5,5623
1	1,6	1,6	1,61	5,6109
2	1,6	1,6	1,59	5,5259
3	1,6	1,61	1,59	5,4174
4	1,61	1,61	1,59	5,6711
5	1,59	1,61	1,59	5,1681
6	1,58	1,62	1,58	4,8006
7	1,57	1,63	1,57	4,4609
29	1,39	1,81	1,43	1,8449
30	1,38	1,82	1,44	1,5578
40	1,38	1,75	1,51	0,8144
105	1,38	1,98	1,62	0,2402

вого приближения. Если же точки  $x^k$  в области определения функции выбираются случайным образом, то такие методы называют стохастическими, или методами случайного поиска.

Случайный поиск, в принципе, может быть осуществлен двумя способами [25]. При первом способе минимум функции находят путем случайного выбора  $x$  из всей допустимой области. Точка минимума может быть найдена на любом шаге, однако убедиться в этом можно только по проведению всего необходимого числа испытаний. Очевидно, что априорная вероятность нахождения минимума в этом случае очень мала.

Действительно, если допустимую область представить в виде  $2n$ -мерных гиперсфер с радиусом  $q$ , а область локализации точки минимума — гиперсферой с радиусом  $q_1$ , то вероятность того, что случайно выбранная точка окажется в сфере, содержащей точку минимума, будет  $p = (q_1/q)^n$ . Например, если  $2n = 10$ , а  $q_1 = 0,1q$ , то вероятность обнаружения минимума составит  $10^{-10}$ .

По этой причине значительно большее распространение получили шаговые алгоритмы случайного поиска, основанные на последовательном приближении к минимуму за счет использования на каждой шаге информации о минимизируемой функции. В общем случае сдвиг рабочей точки можно записать следующим образом:

$$x^{k+1} = x^k + \Delta x^{k+1}. \quad (162)$$

Различные алгоритмы метода случайного поиска различаются способом выбора шага  $\Delta x^{k+1}$ . В табл. 7 приведены несколько алгоритмов случайного поиска [25]. Здесь через  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2m})^T$

## Шаговые алгоритмы случайного поиска

Название алгоритма	Рекуррентная формула	Примечание
«С возвратом при неудачном шаге»	$\Delta x^{k+1} = \begin{cases} c\xi & \text{при } F(x^k) < \\ & < F(x^{k-1}); \\ -\Delta x^k & \text{при } F(x^k) \geq \\ & \geq F(x^{k-1}) \end{cases}$	—
«С пересчетом при неудачном шаге»	$\Delta x^{k+1} = \begin{cases} c\xi & \text{при } F(x^k) < \\ & < F_0^{k-1}; \\ -\Delta x^k + c\xi & \text{при} \\ & F(x^k) \geq F_0^{k-1} \end{cases}$	$F_0^{k-1} = \min F(x^i)$ ( $i=1, 2, \dots, k$ ) — наименьшее значение функции за $k$ предыдущих шагов
«С парной пробой»	$\Delta x^{k+1} = c\xi \operatorname{sign} [F(x^k - g\xi) - F(x^k + g\xi)]$	$(x^k \pm g\xi)$ — пробные точки; $g$ — значение пробного шага
«С наилучшей пробой»	$\Delta x^{k+1} = c\xi^*$	$\xi^*$ — направление наилучшей пробы

обозначен единичный случайный вектор, координаты которого являются случайными величинами, распределенными по равномерному закону, а коэффициент  $c$  представляет собой масштабный множитель, регулирующий значение шага. В алгоритме «С возвратом при неудачном шаге», если случайно сделанный шаг оказывается неудачным, т. е. не приводит к уменьшению минимизируемой функции, рабочая точка возвращается в исходное положение, после чего делается новый случайный шаг. Если же функция уменьшается, то следующий шаг делается уже из новой точки.

В алгоритме «С пересчетом при неудачном шаге» возврат рабочей точки в исходное положение не производится, даже если сделанный шаг оказался неудачным, а делается новый случайный шаг. За счет этого такой алгоритм имеет несколько большее быстроедействие по сравнению с алгоритмом «С возвратом при неудачном шаге»:

Смысл алгоритма «С парной пробой» заключается в следующем. Из исходной точки делаются два пробных случайных шага  $\pm g\xi$ ,

направленных в противоположные стороны. Затем в направлении одного из пробных шагов, приводящего к уменьшению целевой функции, делается рабочий шаг.

Алгоритм поиска «С наилучшей пробой» связан с выполнением серии случайных шагов  $g\xi_1, g\xi_2, \dots, g\xi_n$  из некоторой исходной точки. Рабочий шаг с  $\xi^*$  делается в направлении пробного шага, обеспечивающего наиболее быстрое убывание целевой функции.

С увеличением числа пробных шагов выбираемое направление поиска все более приближается к наилучшему из всех возможных, и в пределе, когда число пробных шагов стремится к бесконечности, это направление совпадает с антиградиентным. Заметим, что в двух последних алгоритмах в отличие от алгоритмов «С возвратом» и «С пересчетом при неудачном шаге» пробные и рабочие шаги четко разделены.

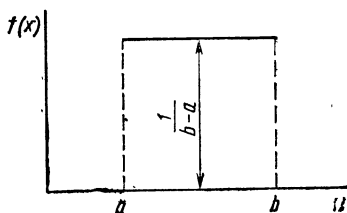
После выполнения достаточно большого числа испытаний точку, обеспечивающую наименьшее значение целевой функции, можно принять за приближенное решение задачи. Уточнение положения точки минимума достигается сокращением размера рабочего и пробного шагов. Это дает удобный критерий окончания поиска, который можно записать в виде  $s \leq \epsilon$ , где  $\epsilon$  — заданное малое число.

Вопрос о сходимости к минимуму статистических поисковых методов очень сложен и в настоящее время до конца не разработан. Можно одинаково убедительно показать, что методы случайного поиска в зависимости от числа переменных как превосходят градиентные, так и уступают последним по быстродействию [2]. Отметим лишь, что преимуществами методов случайного поиска являются простота программной реализации и их способность минимизировать нелинейные функции с очень сложной геометрией гиперповерхности.

Специфичным для методов случайного поиска является способ выработки случайных значений, необходимых для построения случайного вектора  $\xi$ . В настоящее время, по-видимому, единственным способом является способ, основанный на формировании последовательности случайных чисел с помощью рекуррентных соотношений, в которых каждое последующее число образуется из одного или нескольких предыдущих. Полученная таким образом последовательность чисел  $\{\xi_i\}$ , даже удовлетворяющая тестам на случайность, строго говоря, является псевдослучайной. Это объясняется тем, что, используя рекуррентные соотношения с одними и теми же исходными данными, можно получить одинаковые последовательности случайных чисел.

Рассмотрим некоторые способы получения последовательностей равномерно распределенных случайных чисел  $\{\xi_i\}$  в интервале  $(0,1)$  [35].

Рис. 26. График равномерного распределения случайной величины



Для получения последовательности равномерно распределенных чисел  $\{x_i\}$  в интервале  $(a, b)$  можно использовать преобразование вида

$$x_i = a + (b - a) \xi_i. \quad (163)$$

На рис. 26 показан график равномерного распределения, представляющий собой непрерывную функцию плотности вероятности  $f(x) = 1 / (b - a)$ , постоянную в интервале от  $a$  до  $b$  и равную нулю вне этого интервала.

Наиболее просто генерация случайных чисел осуществляется по методу Неймана (метод срединных квадратов). Этот метод состоит в том, что каждое следующее число получается выбором срединных  $n$  разрядов из числа, полученного возведением в квадрат предыдущего  $n$ -разрядного числа. При этом каждый раз отбрасывают по две цифры с обоих концов (остается «середина произведения»). Процесс возведения в квадрат и отбрасывания цифр повторяется многократно, а полученные «середины квадратов» образуют равномерно распределенную в интервале  $(0,1)$  последовательность случайных чисел. Следует заметить, что эта последовательность может оказаться слишком короткой из-за ее вырождения, заключающегося в том, что начиная с некоторого момента, все числа последовательности становятся нулевыми. Для того чтобы избежать вырождения, целесообразно периодически изменять исходный член последовательности.

Более распространенными способами получения последовательностей случайных чисел с равномерным законом распределения являются арифметические процедуры, основанные на конгруэнтных методах. Рекуррентная формула наиболее распространенного мультипликативного конгруэнтного метода имеет вид [35]

$$\xi_{i+1} = p\xi_i \pmod{q},$$

где  $p$  и  $q$  — неотрицательные целые числа. Согласно этому выражению для получения случайного числа  $\xi_{i+1}$  необходимо предыдущее случайное число  $\xi_i$  умножить на постоянный коэффициент  $p$  и взять модуль полученного числа по  $q$ . Алгоритм построения последовательности случайных чисел в интервале  $(0,1)$  включает следующие действия:

1) взять в качестве начального значения  $\xi_0$  любое число, содержащее не менее девяти знаков;

2) умножить это число на коэффициент  $p$ , содержащий по меньшей мере пять знаков;

3) полученное произведение умножить на  $1/q$ ;

4) взять дробную часть результата деления в качестве первого случайного числа;

5) исключить из числа, полученного на шаге 4, запятую и использовать его в качестве случайного числа, которое умножается на  $p$ ;

6) повторить шаги 2—5 до получения нужного количества случайных чисел.

Таким образом, для получения последовательности чисел  $\{\xi_i\}$  необходимо задаться начальным приближением  $\xi_0$ , множителем  $p$  и модулем  $q$ . Длина последовательности зависит от типа вычислительной машины и выбранного модуля, а выбор начального приближения  $\xi_0$  и коэффициента  $p$  определяет статистические характеристики этой последовательности. Заключительным этапом работы алгоритма, предназначенного для формирования последовательностей случайных чисел, является статистическая проверка их качества. Сюда относится проверка периодичности, т. е. длины последовательности, «случайности», равномерности, которая выполняется с помощью различных тестов и критериев.

В качестве иллюстрации применения методов случайного поиска для решения задачи синтеза оптических покрытий в табл. 8 приведена распечатка нескольких шагов, полученных при конструировании трехслойного просветляющего покрытия по алгоритму «С

Таблица 8

**Изменение показателей преломления слоев при синтезе просветляющего покрытия типа  $0,25\lambda_0-0,5\lambda_0-0,25\lambda_0$  методом случайного поиска**

Номер пробы	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$F(x^k)$ , %
0	1,6	1,6	1,6	5,56226
1	1,63225	1,63523	1,62620	6,08896
2	1,56172	1,57485	1,58361	4,83445
3	1,5344	1,58395	1,554	4,028107
4	1,51274	1,56562	1,54412	3,68824
5	1,48378	1,54776	1,55327	3,23555
6	1,43237	1,51773	1,51759	2,37621
30	1,38	1,87544	1,59206	0,33952
81	1,38	1,98925	1,62741	0,23889
82	1,38	1,98207	1,63097	0,24127
83	1,38	2,00219	1,61842	0,24563
92	1,38	1,98925	1,62741	0,23989

пересчетом при неудачном шаге». Для решения этой задачи потребовалось 92 вычисления целевой функции.

**Сравнение оптимизационных методов при синтезе интерференционных покрытий.** Выше задача синтеза интерференционных покрытий была сформулирована в виде задачи оптимизации и был описан целый ряд численных методов ее решения. Действие различных оптимизационных алгоритмов было показано на примере синтеза ахроматического просветляющего покрытия. При этом возникает естественный вопрос, какой метод является лучше? Прежде чем попытаться ответить на этот вопрос, необходимо определить, что следует понимать под «лучшим» методом.

Основными оценками работы алгоритма при решении конкретной задачи являются его надежность и быстродействие. Под надежностью понимается вероятность, с которой находят точку минимума целевой функции при различном выборе нулевых приближений. Потери на поиск количественно определяются числом вычислений минимизируемой функции, которое необходимо для нахождения точки минимума или для выполнения критериев окончания поиска. Иногда для оценки потерь на поиск используют машинное время, затрачиваемое для решения задачи. Однако этот критерий является менее универсальным, поскольку он зависит от типа ЭВМ, используемого транслятора и в большой степени от качества машинной программы.

Теоретические оценки эффективности поиска минимума удается получить лишь для одномерных унимодальных функций [3]. Более того, сам факт сходимости к минимуму доказан только для некоторых численных методов при минимизации квадратичных функций; в то же время многие оптимизационные процедуры, как уже отмечалось выше, вообще не имеют строгого обоснования.

Обычный путь сравнения методов нелинейного программирования заключается в отыскании известного экстремума специальным образом построенных тестовых функций. Как правило, тестовые функции характеризуются сложными поверхностями равного уровня, отражающими те или иные особенности встречающихся на практике задач — многоэкстремальность, наличие «оврагов» и т. п. В настоящее время известен целый ряд таких функций, используемых для оценки работоспособности алгоритмов и программ [2, 3, 34].

Информация, получаемая в ходе численных экспериментов по нахождению минимумов тестовых функций, помогает правильно выбирать оптимизационные методы для решения практических задач.

Эффективность численных методов при решении задачи нахождения минимума функции решающим образом зависит от ее струк-

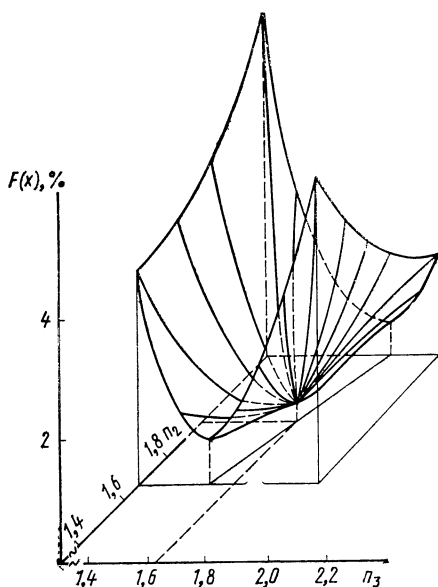
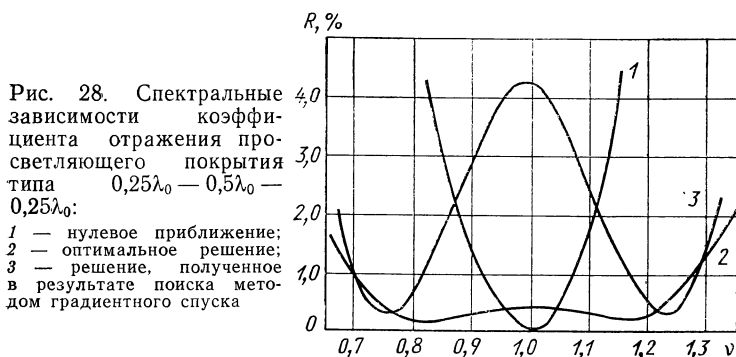


Рис. 27. Поверхность целевой функции просветляющего покрытия типа  $0,25\lambda_0-0,5\lambda_0-0,25\lambda_0$  ( $n_0=1$ ;  $n_1=1,38$ ;  $n_4=1,52$ )

туры. При практических расчетах невысокие результаты или малая скорость сходимости вычислительного процесса, как правило, связаны с несоответствием целевой функции и применяемой стратегии поиска ее минимума. Для получения наибольшей скорости сходимости следует искать наиболее удачное сочетание поискового метода и структуры минимизируемой функции.

Таким образом, при сравнении различных численных методов необходимо выполнить следующие действия.

1. Выбрать критерии сравнения.
2. Определить задачу или класс задач с известными математическими особенностями: числом и расположением стационарных точек, значениями функции в этих точках, наличием или отсутствием «оврагов» и т. п.
3. Выбрать параметры, характеризующие работу алгоритма. К таким параметрам относятся, в частности, длина интервала неопределенности, точность одномерной минимизации, параметры конечно-разностной аппроксимации производных целевой функции и др. Неправильный подбор этих параметров может существенно снизить скорость сходимости алгоритма к минимуму или нарушить ее совсем. Это означает, что проводить сравнение методов между



собой имеет смысл только при оптимальном выборе всей совокупности параметров.

4. Определить критерии окончания поиска. Значение потерь на поиск зависит от точности определения минимума. Поэтому при выполнении экспериментального тестирования необходимо достичь стандартизации в определении момента окончания поиска. При практических расчетах в качестве критерия окончания поиска часто выбирают оценку, характеризующую степень убывания целевой функции на двух последующих итерациях, т. е.

$$|F(x^{k+1}) - F(x^k)| \leq \varepsilon F(x^k). \quad (164)$$

Значение  $\varepsilon$  подбирают в зависимости от точности в компонентах вектора конструктивных параметров, достижимой в эксперименте.

Вернемся еще раз к задаче синтеза трехслойного ахроматического просветляющего покрытия типа  $0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,25\lambda_0$ .

Из табл. 4 следует, что уже при выполнении первой итерации показатель преломления слоя, граничащего с воздухом, стремится к своему нижнему ограничению ( $n_1 = 1,38$ ), и далее поиск ведется в трехмерном пространстве. Это дает возможность графически изобразить поверхность целевой функции, записанной в виде (160), как функцию переменных  $n_2$  и  $n_3$  (рис. 27). В данном случае целевая функция имеет единственный минимум  $x^* = [1,38; 1,99; 1,63]^T$ , расположенный на дне узкого прямолинейного «оврага». Соответствующая точке минимума  $x^*$  спектральная характеристика покрытия показана на рис. 28 (кривая 2).

Для того чтобы более полно охарактеризовать работу различных алгоритмов, эту задачу следует решать при различных нулевых приближениях [21]. Эта мера оказывается вполне оправданной, поскольку задачу не удастся решить при некоторых исходных



конструкциях, тогда как их перезадание позволяет успешно находить минимум целевой функции.

В качестве нулевых приближений были выбраны следующие, вообще говоря, случайные конструкции покрытий: 1) [1,38; 2,28; 1,78]<sup>T</sup>; 2) [1,39; 1,39; 1,39]<sup>T</sup>; 3) [1,50; 1,38; 1,50]<sup>T</sup>; 4) [1,60; 1,60; 1,60]<sup>T</sup>; 5) [1,60; 1,70; 1,80]<sup>T</sup>; 6) [1,60; 1,38; 1,60]<sup>T</sup>; 7) [1,80; 1,80; 1,80]<sup>T</sup>; 8) [2,10; 2,10; 2,10]<sup>T</sup>.

Задача считалась решенной как только значение целевой функции оказывалось не более  $0,24 \cdot 10^{-2}$ . Такая точность в определении минимума соответствует точности определения двух знаков после запятой в компонентах вектора  $x$ .

При выборе нулевого приближения, лежащего достаточно близко от точки минимума (конструкция 1, для которой  $F(x^0) = 0,512 \cdot 10^{-2}$ ), задачу удалось решить, используя только методы Гаусса — Зайделя и Пауэлла. Кроме того, при значительном удалении нулевого приближения от точки минимума (конструкция 8, для которой  $F(x^0) = 0,169 \cdot 10^0$ ) задача была решена только с использованием метода случайного поиска. Любопытно отметить, что в тех случаях, когда для решения задачи градиентными методами требовалось относительно большое число вычислений целевой функции (конструкции 2—6), неградиентными методами удавалось отыскать точку минимума с меньшими потерями на поиск, и наоборот. Исключение в этом отношении составляют методы Хука — Дживса и случайного поиска, потери на поиск в которых мало зависят от выбора нулевого приближения.

Количественно результаты сравнения можно сопоставить, введя оценку, характеризующую средние потери на поиск

$$N >= \sum_{i=1}^n N_i/n,$$

где  $N_i$  — число вычислений целевой функции при выборе  $i$ -го приближения. В этом случае оказывается возможным ранжировать поисковые методы по значению средних потерь на поиск.

Результаты такого ранжирования, полученные при решении данной задачи, приведены в табл. 9. Из таблицы видно, что методы случайного поиска, Хука — Дживса и Дэвидона — Флетчера — Пауэлла показали приблизительно одинаковые результаты и оказались явно лучше других. Высокая эффективность первых двух методов по сравнению с алгоритмами, приведенными в табл. 4 и 5, объясняется отсутствием процедур одномерной минимизации, в значительной мере определяющих быстродействие алгоритмов. Преимущество этих методов сохраняется при увеличении числа варьируемых параметров слоев покрытия. В то же время градиентные методы (в том числе алгоритм Дэвидона — Флетчера — Пауэлла) ста-

Таблица 9

Сравнение алгоритмов нелинейного программирования при решении задачи синтеза просветляющего покрытия типа  $0,25\lambda_0-0,5\lambda_0-0,25\lambda_0$  (в скобках указан метод одномерной минимизации)

Алгоритм	Надежность	$\langle N \rangle$
Случайного поиска	0,875	136
Хука — Дживса	0,75	92
Дэвидона — Флетчера — Пауэлла (квадратичная аппроксимация)	0,75	106,8
Гаусса — Зайделя (квадратичная аппроксимация)	0,75	179,3
Пауэлла (квадратичная аппроксимация)	0,75	181,7
Флетчера — Ривса («золотое сечение»)	0,75	316,7
Поллака — Риббьера «золотое сечение»	0,75	364,7
Наискорейшего спуска (квадратичная аппроксимация)	0,75	446

новятся малоэффективными уже при конструировании покрытий с числом слоев больше пяти. Как показывает анализ таблиц, использование градиентных методов оказывается наиболее эффективным в областях, достаточно удаленных от точки минимума.

Хотя алгоритм Дэвидона — Флетчера — Пауэлла показал при решении данной задачи высокую скорость сходимости, это не распространяется на другие алгоритмы метода переменной метрики (рис. 29). На рис. 29 видно, что минимум целевой функции был достигнут только при использовании алгоритмов Дэвидона — Флетчера — Пауэлла и Гольдфарба. Отдельные детали программирования в данном случае не могли повлиять на результаты сравнения, так как машинные программы отличались только способом формирования матрицы направлений.

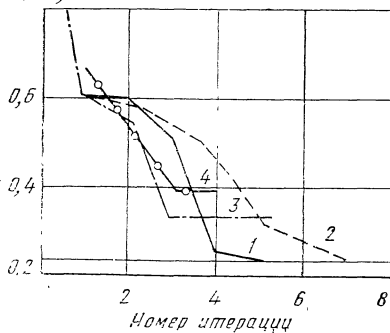
$$F(\bar{x}^k), \%$$


Рис. 29. Сходимость методов переменной метрики при решении задачи синтеза просветляющего покрытия типа  $0,25\lambda_0-0,5\lambda_0-0,25\lambda_0$ :

1 — метод Дэвидона—Флетчера—Пауэлла, 2 — метод Гольдфарба; 3 — метод Фиакко—Мак-Кормика, 4 — метод Гринстада

Наименее приемлемыми для решения рассматриваемой задачи, как следует из табл. 9, оказались методы наискорейшего и градиентного спусков. При использовании последнего метода точка минимума не была достигнута ни при одном выбранном нулевом приближении. Это связано с тем, что направление антиградиента оказывается почти ортогональным ориентации «дна оврага».

При синтезе произвольного покрытия ориентация «оврагов» на поверхности целевой функции, как правило, неизвестна даже приблизительно. В противном случае это дало бы возможность построить весьма эффективный поисковый алгоритм. Однако для правильной организации расчетов достаточно знания самого факта существования «оврагов». В этом случае следует осуществить спуск рабочей точки на «дно оврага», а затем обеспечить ее движение по «дну» в направлении убывания целевой функции.

Быстрый спуск на «дно оврага», в принципе, обеспечивают градиентные методы, а устойчивое перемещение рабочей точки вдоль «дна» может быть осуществлено с использованием метода Хука — Дживса. Если же линии постоянного уровня очень изогнуты или «овраг» имеет излом в виде острого угла, то такой алгоритм не позволяет продолжить поиск.

Эту трудность можно преодолеть, усложнив этап «исследующего» поиска или использовав метод случайного поиска. Во втором случае, сделав несколько случайных проб в окрестности излома, полученную точку, обеспечивающую наименьшее значение целевой функции, можно использовать в качестве нулевого приближения для дальнейшего поиска. Однако, как показывает опыт решения большого числа практических задач, обычно для получения удовлетворительного приближения к искомой характеристике покрытия достаточно осуществить однократный прогон цикла градиентные методы — прямой поиск.

Взаимодействие алгоритмов проиллюстрируем на примере синтеза широкополосного светоделительного покрытия [19].

Предположим, что требуется сконструировать покрытие, обеспечивающее коэффициент отражения  $R=60\%$  в спектральной области по ширине, соответствующей видимому диапазону. В качестве нулевого приближения выберем семислойное покрытие с показателями преломления всех слоев, равными 1,8, оптическими толщинами, равными  $0,25\lambda_0$ , с подложкой из стекла с  $n_8=1,52$ . В ходе поиска будем варьировать только показатели преломления слоев в области  $1,38 \leq n_j \leq 2,3$ .

В табл. 10 приведены результаты, полученные на различных этапах поиска. Смена алгоритмов осуществлялась автоматически по критерию (164) при  $\epsilon \leq 0,01$ . Спектральные характеристики покрытия, полученные на различных этапах поиска, показаны на

Таблица 10

Значения показателей преломления слоев светоделительного покрытия, полученные на различных этапах поиска

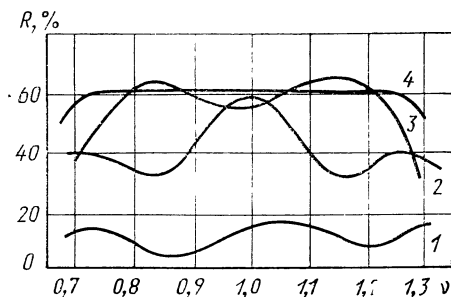
Номер среды $j$	Алгоритм			
	Дэвидона— Флетчера— Пауэлла	Флетчера — Ривса	Пауэлла	Хука— Дживса
	$n_j$			
0	1	1	1	1
1	2,15	2,2	2,3	2,3
2	1,39	1,38	1,38	1,38
3	1,99	2,15	2,14	2,30
4	1,77	1,38	1,38	1,41
5	1,77	1,66	1,65	1,45
6	1,81	2,03	2,01	2,09
7	1,92	1,56	1,56	1,84
8	1,52	1,52	1,52	1,52
$F(x)$	$0,22 \cdot 10^0$	$0,44 \cdot 10^{-1}$	$0,36 \cdot 10^{-1}$	$0,69 \cdot 10^{-2}$
Число итераций	2	9	2	—
Число оценок $F(x)$	46	115	59	159

рис. 30. Отклонение результирующей характеристики от заданного уровня в диапазоне длин волн 0,41—0,69 мкм не превышает 0,9%.

В заключение этого параграфа сделаем некоторые замечания о характере решений, получаемых при синтезе покрытий методом оптимизации. Из формулировки задачи синтеза в виде задачи нелинейного программирования не следует, что с помощью какого-либо численного метода удастся найти глобальный минимум целе-

Рис. 30. Спектральные зависимости коэффициента отражения семи-слойного светоделительного покрытия, полученные на разных этапах поиска:

1 — нулевое приближение;  
2 — алгоритм Дэвидона—  
Флетчера—Пауэлла; 3 —  
алгоритм Флетчера—Ривса;  
4 — алгоритм Хука—Дживса



вой функции. В лучшем случае построение убывающей последовательности (146) приведет к точке локального минимума. Это связано с двумя причинами.

Во-первых, все рассмотренные выше алгоритмы, как детерминированные, так и статистические, при определении направления поиска минимумов целевой функции используют только ее локальные свойства.

Во-вторых, в нелинейных задачах, к числу которых относится рассматриваемая задача, в общем случае характеристические признаки глобального минимума неизвестны. Для обоснования глобальности полученного минимума необходимо либо исследовать целевую функцию на выпуклость во всей области ее определения, либо попытаться использовать соображения, основывающиеся на физических свойствах задачи.

Интуитивно ясно, что, осуществляя последовательный перебор в некоторой ограниченной области, рано или поздно можно найти совокупность значений конструктивных параметров покрытия, обеспечивающую наименьшее значение целевой функции. Однако убедиться в этом можно, рассмотрев все возможные комбинации параметров слоев.

Очевидно, что шаг изменения параметров должен быть соразмерен с точностью их определения в эксперименте. Затраты машинного времени при таком подходе очень быстро растут с увеличением числа варьируемых параметров. Нетрудно подсчитать, для  $m$ -слойного покрытия существует  $W^{2m}$  возможных комбинаций ( $W$  — число допустимых значений каждого параметра). Например, для нахождения минимума трехслойного покрытия при варьировании только показателей преломления по однородной сетке в интервале 1,38—2,3 с шагом 0,01 необходимо  $93^3 = 84357$  раз решить задачу анализа. Если предположить, что для расчета одного варианта требуется 1 с, то для решения задачи понадобится более 220 ч машинного времени.

С точки зрения практической реализации интерес представляет поиск не глобального минимума, а решений, имеющих малую чувствительность к вариациям параметров слоев. При проектировании конкретного покрытия на этапе решения задачи синтеза, как правило, используется упрощенная математическая модель покрытия.

Реальные пленочные материалы, из которых изготавливают отдельные слои покрытия, характеризуются большей или меньшей неоднородностью и дисперсией показателя преломления, а в некоторых случаях обладают заметным поглощением. Игнорирование этих факторов, к которым добавляются ошибки, неизбежно возникающие при изготовлении покрытия, может привести к значительному

расхождению между теоретической и экспериментальной характеристиками. Поэтому заключительный этап конструирования покрытий с заданными характеристиками связан с исследованием устойчивости полученных решений к действию различных дестабилизирующих факторов, имеющих место при изготовлении покрытий.

Вопросы, связанные с анализом чувствительности характеристик покрытий, возникающих при отклонении параметров слоев от расчетных значений, рассмотрены в следующей главе.

## ГЛАВА 3

# **АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ПОКРЫТИЙ**

---

## **1. ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ОПТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕАЛЬНЫХ ПОКРЫТИЙ**

Цель выполнения анализа устойчивости — получение информации о рассеянии оптических характеристик, возникающих при вариациях параметров слоев.

Как правило, при изготовлении покрытия не удается точно получить вычисленные значения показателей преломления и толщины слоев. Поэтому очень важно оценить, при каком разбросе этих значений характеристики покрытия оказываются нечувствительными или малочувствительными к отклонениям параметров слоев от номинальных значений. В этом случае, очевидно, нет нужды заботиться о точности параметров слоев в процессе изготовления покрытия, что создает большие удобства.

Если же какая-либо характеристика покрытия оказывается очень чувствительной к изменению некоторых параметров, то следует более тщательно исследовать ее устойчивость. Помимо решения основной задачи анализа устойчивости, связанной с оценкой чувствительности характеристик покрытия к возмущениям параметров слоев и выбора допусков на их значения, анализ устойчивости позволяет оценить чувствительность характеристик при изменении параметров окружающих сред, а также облегчает внесение необходимых коррективов в рассчитанную оптимальную структуру.

Всю совокупность факторов, влияющих на характеристики покрытия, можно разделить на две группы.

К первой группе относятся факторы, связанные с нестабильностью процесса изготовления слоев покрытия. Нестабильность процесса изготовления покрытия является следствием плохого контроля

таких технологических параметров, как температура нагрева подложек, давление остаточных газов в напылительной камере, скорость испарения и конденсации пленочного материала и др. В свою очередь, это может привести к изменению дисперсионной зависимости показателя преломления получаемых слоев, появлению неоднородности, увеличению коэффициента поглощения. Влияние этой группы факторов, в принципе, может быть учтено в рамках описанной математической модели покрытия. При этом анализ устойчивости характеристик покрытия выполняется путем многократного решения прямой задачи с использованием моделей различной точности.

Ко второй группе относятся факторы, связанные с контролем параметров слоев, главным образом их толщин, в процессе изготовления покрытия. Эта часть проблемы решается моделированием на ЭВМ процесса контроля толщин слоев. В ходе моделирования удается учесть ошибки в определении толщины слоев, обусловленные ограниченной чувствительностью используемой контрольно-измерительной аппаратуры, оценить допуски и выбрать рациональный способ контроля. Это позволяет свести к минимуму возможные экспериментальные ошибки и тем самым сократить путь от расчета конструкции покрытия до ее практической реализации.

В простейшем случае анализ устойчивости осуществляется многократными расчетами оптических характеристик покрытия при заданных отклонениях параметров слоев от номинальных значений. Расчет выполняется при заданной ошибке в определении параметра слоя  $c_j = \Delta x_j / x_j$ , где  $\Delta x_j$  — приращение параметра  $j$ -го слоя ( $j = \overline{1, m}$ ).

Решив в общем случае  $4m$  раз задачу анализа при выборе  $x_j = x_j(1 \pm c_j)$ , можно получить картину изменения характеристик покрытия относительно вариаций параметров каждого из слоев. Такой анализ в равной мере оказывается полезным при оценке устойчивости характеристик покрытия при изменении как показателей преломления, так и толщин слоев. Вычислительный процесс может быть легко автоматизирован, если в распоряжении конструктора имеется дисплей и графопостроитель, подключенные непосредственно к ЭВМ.

Если при выполнении анализа устойчивости дополнительно вычисляется значение целевой функции  $F(x)$ , то оценить степень рассеяния характеристик можно по величине  $\Delta F$ . Для малых приращений  $\Delta x_j$  изменение целевой функции можно записать так:

$$\Delta F = \sum_{j=1}^{2m} \Delta x_j \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} \right|_{x_j = x_j^0}, \quad (165)$$

где  $x_j^0$  — номинальное значение параметра  $j$ -го слоя. Если заранее

известен интервал изменения параметра слоя  $-\varepsilon_j \leq x_j \leq \varepsilon_j$ , то нетрудно вычислить максимальное приращение целевой функции:

$$\Delta F_{\max} = \sum_{j=1}^{2m} (\pm \varepsilon_j) \left. \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} \right|_{x_j=x_j^0}, \quad (166)$$

причем знак  $\varepsilon_j$  выбирают одинаковым со знаком частной производной.

Характер распределения ошибок, возникающих при определении толщины слоев многослойных покрытий, в решающей степени зависит от метода контроля, используемого при изготовлении покрытия. В настоящее время для контроля толщин слоев в процессе их изготовления в основном применяют два метода.

Первый метод основан на зависимости коэффициентов отражения и пропускания тонкой пленки от ее толщины (фотометрический метод). Фотометрический метод контроля толщин слоев является наиболее распространенным при производстве оптических покрытий, поскольку он не требует сложной аппаратуры, а результаты измерений могут быть легко интерпретированы. Важной особенностью фотометрического метода контроля является то, что ошибка в определении толщины  $j$ -го слоя при изготовлении многослойного покрытия зависит не только от точности измерения этого слоя, но также и от ошибок в определении толщины ранее нанесенных слоев. Другими словами, ошибки в определении толщины слоев интерференционного покрытия при их контроле фотометрическим методом являются зависимыми. По этой причине систематическое изменение в некоторых пределах параметров слоев покрытия с целью оценки влияния таких изменений на его характеристики мало что дает.

Второй метод контроля толщин слоев основан на прецизионном измерении массы наносимого на подложку вещества с помощью кварцевого резонатора. Если предположить, что плотность пленки, наносимой на поверхность кварцевого кристалла, не изменяется во времени, то можно считать, что сдвиг резонансной частоты резонатора пропорционален ее толщине. При использовании этого метода ошибки в определении толщины слоя являются независимыми, и их влияние на характеристики покрытия можно оценить по формуле (165). Если же ошибки в определении толщины слоя велики и анализ с помощью частных производных не дает адекватных результатов, то оценка рассеяния характеристик покрытия проводится с помощью метода Монте-Карло.

Ниже рассмотрим оба метода контроля толщин слоев многослойных покрытий в процессе их изготовления и опишем метод исследования ошибок в определении толщины слоев и их влияния



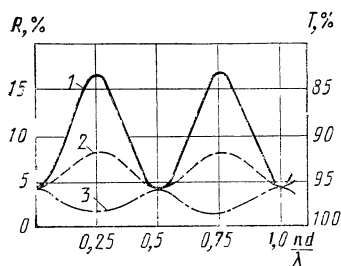


Рис. 31. Зависимости коэффициентов отражения и пропускания от оптической толщины пленок с различными показателями преломления  $n_1$  при нормальном падении излучения ( $n_0=1$ ;  $n_2=1,52$ ):  
1 —  $n_1=1,95$ ; 2 —  $n_1=1,65$ ; 3 —  $n_1=1,38$

на характеристики покрытия путем моделирования на ЭВМ работы контрольного устройства.

## 2. КОНТРОЛЬ ТОЛЩИН СЛОЕВ ФОТОМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Сущность фотометрического метода заключается в том, что наблюдение ведется за изменением интенсивности прошедшего через прозрачную подложку или отраженного от нее монохроматического излучения с длиной волны  $\lambda_K$ .

Контроль толщины прозрачных слоев осуществляется по регистрации экстремумов контрольного излучения, периодически появляющихся при увеличении оптической толщины на величину, равную  $\lambda_K/4$ . На рис. 31 приведены зависимости коэффициентов отражения и пропускания прозрачных однородных пленок с различными показателями преломления от их оптической толщины. Из рис. 31 следует, что условия наблюдения интерференционной картины определяются соотношением показателей преломления материалов пленки и подложки.

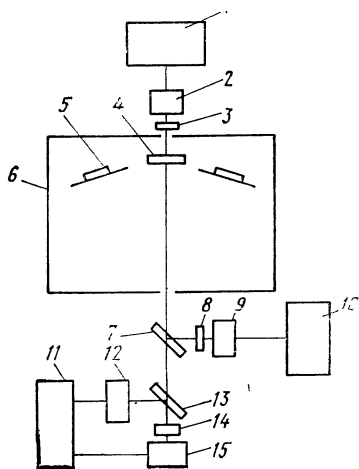
Если измеряется интенсивность отраженного от пленки излучения, то при увеличении толщины пленки в случае  $n_1 > n_2$  коэффициент отражения сначала возрастает, достигая максимального значения, когда оптическая толщина пленки становится равной  $0,25\lambda_K$ , а затем уменьшается и проходит через минимум при толщине пленки, равной  $0,5\lambda_K$ , и т. д. Последовательность появления максимумов и минимумов изменится на обратную, если выбрать  $n_1 < n_2$ . Максимальное и минимальное значения коэффициентов отражения соответственно определяются следующими выражениями:

$$R_{\max} = \left( \frac{n_1^2 - n_0 n_2}{n_1^2 + n_0 n_2} \right)^2; \quad n_1 d = (2l + 1) 0,25\lambda_K; \quad (167)$$

$$R_{\min} = \left( \frac{n_2 - n_0}{n_2 + n_0} \right)^2; \quad n_1 d = 2l 0,25\lambda, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (168)$$

Рис. 32. Принципиальная схема фотометрического контроля:

1, 10 — усилители, блоки индикации и управления; 2, 9 — фотоприемники; 3, 8 — узкополосные фильтры или монохроматоры; 4 — контрольный образец; 5 — образцы оптических деталей; 6 — вакуумная камера; 7, 13 — светоделительные пластины; 11 — источник питания и стабилизации; 12 — фотоприемник опорного сигнала; 14 — модулятор; 15 — источник излучения. Элементы 1—3 используются для контроля прошедшего сигнала, а элементы 8—10 — для контроля отраженного сигнала.



Из формулы (168) следует, что для однородных пленок, оптическая толщина которых равна целому числу полуволн, коэффициенты отражения и пропускания равны коэффициентам отражения и пропускания от чистой подложки. В действительности этого может и не быть вследствие неоднородности показателя преломления пленки. Последнее обстоятельство дает возможность судить о величине и характере неоднородности показателя преломления диэлектрической пленки по спектрофотометрическим кривым коэффициентов пропускания или отражения.

К настоящему времени разработано большое число схемных решений, основанных на регистрации экстремальных значений интенсивности излучения отраженного или прошедшего через систему «покрытие — подложка» [4, 8, 31]. Различие этих схем в основном заключается в способах приема и обработки контрольного сигнала. Рассмотрим в общих чертах процесс фотометрического контроля (рис. 32).

Коллимированный луч света от источника излучения, пройдя через полупрозрачное зеркало, отражающее часть излучения в направлении фотоприемника опорного канала, попадает в вакуумную камеру и направляется на контрольную подложку, расположенную в центре карусели, на которой крепятся детали.

Имеются две возможности измерения толщины наносимого слоя. В первом случае световой поток, прошедший через прозрачную контрольную подложку, попадает на фотоприемник, расположенный в верхней части вакуумной камеры. Во втором случае отраженный от контрольной подложки луч возвращается назад и отклоняется

с помощью полупрозрачного зеркала в направлении второго фотоприемника. Опорный фотоприемник, включенный в плечо сравнения моста, обеспечивает стабилизацию фотоэлектрической схемы.

В качестве источника излучения обычно используют галогенные лампы накаливания с вольфрамовой нитью, имеющие непрерывный спектр излучения приблизительно от 0,35 до 3,0 мкм. Для выделения контрольной длины волны  $\lambda_k$ , в долях которой измеряется оптическая толщина наносимых слоев, на пути распространения излучения перед фотоприемником в основных каналах помещают монохроматор или калиброванный узкополосный светофильтр. В ряде случаев предпочтительнее оказывается использовать монохроматор, поскольку с его помощью удастся выделить более узкую полосу излучения. Это является особенно необходимым при изготовлении диэлектрических узкополосных фильтров. Кроме того, с помощью монохроматора можно плавно изменять длину волны контрольного излучения, что создает определенные удобства при изготовлении покрытий. Основным недостатком монохроматоров и светофильтров является их небольшая светосила, что приводит к необходимости увеличения мощности источника излучения и повышения чувствительности фотоэлектрической схемы.

Для снижения уровня помех, связанных с излучением испарителей и нагревателей, световой поток модулируется с помощью механического прерывателя с частотой, составляющей несколько десятков или сотен герц. В качестве фотоприемников обычно используются фотоумножители, фоторезисторы или фотодиоды.

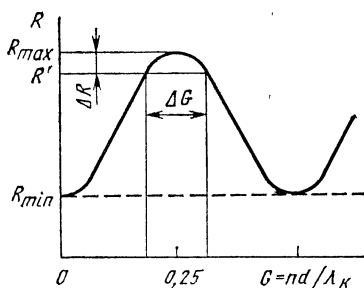
При работе фотометра на переменном токе электрический сигнал, снимаемый с фотоприемника, усиливается с помощью маломощного узкополосного усилителя с регулируемым коэффициентом усиления, настроенного на частоту модуляции контрольного сигнала.

Необходимость регулирования коэффициента усиления связана, во-первых, с различием в спектральных характеристиках источника излучения и фотоприемника и, во-вторых, с тем, что интенсивность контрольного излучения при нанесении многослойного покрытия изменяется в широких пределах.

Сигнал с выхода усилителя выпрямляется и регистрируется стрелочным гальванометром или воспроизводится на цифровом индикаторе. В последнее время все чаще при разработке вакуумно-напылительного оборудования блок фотометрического контроля соединяют с микропроцессорными управляющими устройствами, позволяющими оперативно в течение технологического процесса контролировать и выполнять необходимую корректировку большого числа параметров, в том числе толщины и скорости осаждения слоев.

Фотометрический метод контроля обычно используют при изготовлении покрытий, состоящих из слоев, оптическая толщина кото-

Рис. 33. Изменение интенсивности отраженного сигнала с длиной волны  $\lambda_k$  при нанесении прозрачного слоя с показателем преломления  $n_1$  на подложку с  $n_2$  ( $n_1 > n_2 > n_0$ ):  $\Delta G$  — возможная ошибка в определении оптической толщины слоя;  $\Delta R$  — погрешность в регистрации экстремума отраженного сигнала



рых кратна четверти длины волны контрольного излучения. Однако этот метод можно также применять для контроля толщины слоев, не равных  $l \cdot 0,25\lambda_k$  ( $l=1, 2, \dots$ ), а также для контроля толщины пленок сильно поглощающих на длине волны  $\lambda_k$  материалов. В этом случае необходимо прокалибровать фотоприемник с помощью набора нейтральных светофильтров с известным коэффициентом пропускания.

Для контроля покрытий, состоящих из слоев различной оптической толщины, имеется также другая возможность, связанная с заменой контрольных подложек после нанесения одного слоя или группы слоев. При этом контрольная длина волны каждый раз пересчитывается таким образом, чтобы оптическая толщина слоя оказалась кратной  $0,25\lambda_k$ . Современные вакуумные напылительные установки снабжены устройством, позволяющим заменять контрольные подложки без развакуумирования рабочей камеры. В некоторых типах установок предусмотрен возврат контрольных подложек в исходное положение, что дает возможность наносить один и тот же материал на определенную контрольную пластину.

Основные трудности контроля толщины слоев фотометрическим методом связаны с необходимостью с большой точностью фиксировать момент достижения экстремального значения интенсивности контрольного излучения. Однако практически сделать это довольно трудно, поскольку скорость изменения интенсивности контрольного сигнала в момент достижения экстремума мала, а реальная контрольно-измерительная аппаратура имеет ограниченную чувствительность. Недостаточная точность при фиксировании достижения экстремума интенсивности контрольного сигнала является причиной появления ошибок в определении оптической толщины слоя.

Для оценки ошибки в определении толщины слоя при использовании фотометрического метода контроля предположим, что однородную прозрачную пленку с показателем преломления  $n_1$  наносят на прозрачную подложку с показателем преломления  $n_2$ . Для определенности положим, что  $n_1 > n_2$ .

На рис. 33 схематически показано изменение интенсивности отраженного контрольного сигнала с длиной волны  $\lambda_k$  по мере увеличения оптической толщины пленки, выраженной в частях  $\lambda_k$ . Штриховой линией отмечен уровень отражения от непокрытой подложки.

На рисунке видно, что погрешность в регистрации экстремума  $\Delta R$  однозначно связана с ошибкой в определении толщины слоя  $\Delta G$ . Если коэффициент отражения от слоя  $R > R'$ , то процесс нанесения слоя может быть прерван с равной вероятностью в любой момент времени. Однако на практике момент прекращения нанесения слоя фиксируется по началу обратного движения стрелки измерительного прибора, т. е. когда экстремум уже пройден. Это обстоятельство обуславливает систематический характер ошибок в определении оптической толщины слоев.

В зависимости от соотношения показателей преломления подложки и пленки, а также от режима регистрации интенсивности контрольного сигнала (измеряется  $R$  или  $T$ ), момент окончания нанесения слоя определяется одним из следующих соотношений:

$$R' = R_{\max} \mp \Delta R;$$

$$T' = T_{\min} \pm \Delta T, \text{ если } n_1 > n_2,$$

или

$$R' = R_{\min} \pm \Delta R;$$

$$T' = T_{\max} \mp \Delta T, \text{ если } n_1 < n_2. \quad (169)$$

Верхний знак в соотношениях (169) выбирается при достижении экстремумов с нечетными номерами, нижний — с четными. Заметим, что для однородных и прозрачных пленок в силу периодичности кривых  $R(G)$  и  $T(G)$  указанные четыре способа контроля исчерпывают все возможные варианты. В дальнейшем, говоря о способе контроля, будем иметь в виду режим регистрации интенсивности контрольного сигнала и номер экстремума, при достижении которого прекращается нанесение слоя, и обозначать его следующим образом:  $R_{\lambda_k/4}$ ,  $T_{\lambda_k/4}$ ,  $R_{\lambda_k/2}$  и  $T_{\lambda_k/2}$ .

Относительное значение погрешности при измерении экстремальных значений коэффициентов отражения  $R_0$  или пропускания  $T_0$  можно определить следующим образом:

$$c = \Delta R/R_0 \text{ или } c = \Delta T/T_0. \quad (170)$$

Теперь оценим ошибку в определении толщины слоя, возникающую при регистрации максимума интенсивности отраженного контрольного сигнала (см. рис. 33). Фазовая толщина слоя в момент прекращения его нанесения равна  $\pi/2 + \delta\Phi$ . Представим выражения для тангенциальных составляющих векторов электрического и магнитного полей (69 и (70) в виде ряда Тейлора в окрестности точки  $\Phi = \pi/2$  ( $n_1 d = 0,25\lambda_k$ ), ограниченного квадратичными членами:

$$E = -\sin(\delta\Phi) + \frac{i}{n_1} \cos(\delta\Phi) n_2 \approx -\delta\Phi + \frac{i}{n_1} \left(1 - \frac{(\delta\Phi)^2}{2}\right) n_2; \quad (171)$$

$$H = in_1 \cos(\delta\Phi) - \sin(\delta\Phi) \approx in_1 \left(1 - \frac{(\delta\Phi)^2}{2}\right) - \delta\Phi n_2.$$

Коэффициент отражения  $R'$  в этом случае имеет следующий вид:

$$R' = \left| \frac{E-H}{E+H} \right|^2 \approx \frac{A(\delta\Phi)^2 + B(1 - (\delta\Phi)^2/2)^2}{C(\delta\Phi)^2 + D(1 - (\delta\Phi)^2/2)^2}, \quad (172)$$

где

$$A = (n_2 - 1)^2; \quad B = (n_2/n_1 - n_1)^2; \quad C = (n_2 + 1)^2; \quad D = (n_2/n_1 + n_1)^2.$$

Ограничиваясь членом второго порядка малости, формулу (172) можно представить следующим образом:

$$R' \approx \frac{B}{D} \left[ 1 + \left( \frac{A}{B} - \frac{C}{D} \right) (\delta\Phi)^2 \right]. \quad (173)$$

Заметим, что  $B/D = R_{\max}$ . Теперь из (172) и (173) можно получить выражение для абсолютной погрешности в определении интенсивности отраженного сигнала:

$$\Delta R = R_{\max} - R' \approx R_{\max} \left( \frac{C}{D} - \frac{A}{B} \right) (\delta\Phi)^2.$$

Из этого выражения следует

$$(\delta\Phi)_{\lambda_k/4}^R = \left[ \left( \frac{C}{D} - \frac{A}{B} \right)^{-1} \frac{\Delta R}{R_{\max}} \right]^{1/2}. \quad (174)$$

Для того чтобы получить расчетную формулу для оценки ошибки в определении оптической толщины слоя при регистрации минимума отраженного сигнала, выражения для  $E$  и  $H$  следует разложить в ряд в окрестности точки  $\Phi = \pi$ . Выражение для  $R'$  в этом случае принимает вид

$$R' = \frac{A}{C} \left[ 1 + \left( \frac{B}{A} - \frac{D}{C} \right) (\delta\Phi)^2 \right].$$

Заметим, что  $A/C = R_{\min}$ . Учитывая, что  $\Delta R = R' - R_{\min}$ , получим

$$(\delta\Phi)_{\lambda_k/2}^R = \left[ \left( \frac{B}{A} - \frac{D}{C} \right)^{-1} \frac{\Delta R}{R_{\min}} \right]^{1/2}. \quad (175)$$

Для получения формул для расчета ошибки в определении толщины слоя по регистрации интенсивности прошедшего контрольного сигнала учтем, что

$$T_{\min}^{\max} = 1 - R_{\max}^{\min}; \quad T' = 1 - R'.$$

Используя эти соотношения, можно показать, что  $\Delta T = \Delta R$ . Тогда в соответствии с формулой (173)

$$\frac{\Delta T}{T_{\min}} = \frac{R_{\max}}{1 - R_{\max}} \left( \frac{C}{D} - \frac{A}{B} \right) (\delta\Phi)^2 = \frac{B}{D - B} \left( \frac{C}{D} - \frac{A}{B} \right) (\delta\Phi)^2.$$

Отсюда

$$(\delta\Phi)_{\lambda_K/4}^T = \left[ \frac{B}{D - B} \left( \frac{C}{D} - \frac{A}{B} \right)^{-1} \right] \frac{\Delta T}{T_{\min}}. \quad (176)$$

Аналогичным образом можно получить формулу для определения ошибки в толщине слоя при контроле  $T_{\lambda_K/2}$ :

$$\frac{\Delta T}{T_{\max}} = \frac{R_{\min}}{1 - R_{\min}} \left( \frac{B}{A} - \frac{D}{C} \right) (\delta\Phi)^2 = \frac{A}{C - A} \left( \frac{B}{A} - \frac{D}{C} \right) (\delta\Phi)^2.$$

Отсюда

$$(\delta\Phi)_{\lambda_K/2}^T = \left[ \frac{A}{C - A} \left( \frac{B}{A} - \frac{D}{C} \right) \right] \frac{\Delta T}{T_{\max}}. \quad (177)$$

Приведем численный пример. Пусть на стеклянную подложку с  $n_2 = 1,51$  наносится пленка с  $n_1 = 2,3$ . Предположим, что погрешность в регистрации экстремума интенсивности контрольного сигнала составляет 2 %. Тогда по формулам (174)–(177) нетрудно подсчитать, что оптическая толщина слоя в момент прекращения его нанесения составляет соответственно  $0,278\lambda_K$  (способ контроля  $R_{\lambda_K/4}$ ),  $0,508\lambda_K$  (способ контроля  $R_{\lambda_K/2}$ ),  $0,293\lambda_K$  (способ контроля  $T_{\lambda_K/4}$ ) и  $0,537\lambda_K$  (способ контроля  $T_{\lambda_K/2}$ ).

Итак, при погрешности в регистрации экстремума интенсивности контрольного излучения, равной 2 %, относительная погрешность в определении оптической толщины слоя в зависимости от способа регистрации экстремума может превышать 17 %.

Анализируя полученные формулы, можно сделать определенные выводы о точности контроля толщины слоя в процессе его нанесения. В частности, при постоянной величине  $c$ , если  $n_1 > n_2$ , контроль  $R_{\lambda_K/2}$  обеспечивает самые малые «ошибки перепыления»; при  $n_1 < n_2$  лучшие результаты дает использование контроля  $R_{\lambda_K/4}$ .

Выше предполагалось, что относительная погрешность в определении экстремума интенсивности контрольного излучения является постоянной величиной. Теперь рассмотрим, от чего она зависит и как ее можно оценить. Ее значение, очевидно, зависит от показателей преломления подложки и пленки, коэффициента усиления усилителя и точности фиксации экстремума.

Изменение сигнала, снимаемого с фотоприемника, обусловленного нанесением пленки, можно оценить по числу делений на шкале

гальванометра, проходимых стрелкой прибора, которое пропорционально,  $\alpha p(R_{\max}-R_{\min})$  или  $\alpha p(T_{\max}-T_{\min})$ . Здесь через  $p$  обозначен номер экстремума, при достижении которого прекращается нанесение слоя; коэффициент  $\alpha$  зависит только от характеристик измерительного прибора. Величину  $\alpha$  можно оценить экспериментально, подсчитывая число делений, проходимых стрелкой гальванометра при нанесении слоя четвертьволновой оптической толщины с известным показателем преломления, и деля эту величину на  $R_{\max}-R_{\min}$  или  $T_{\max}-T_{\min}$ .

Обозначим через  $\beta$  число делений на шкале прибора, которое необходимо, чтобы оператору можно было убедиться в том, что стрелка начала движение в обратную сторону. Как правило,  $\beta=1...2$ . Теперь можно записать

$$c_R = \frac{\beta}{\alpha p (R_{\max} - R_{\min})} \text{ или } c_T = \frac{\beta}{\alpha p (T_{\max} - T_{\min})} . \quad (178)$$

Из этих формул, в частности, следует, что с уменьшением разницы в значениях показателей преломления подложки и пленки уменьшается уровень электрического сигнала, снимаемого с фотоэлемента, и, следовательно, снижается точность регистрации момента окончания нанесения слоя. Например, при нанесении слоя четвертьволновой оптической толщины с показателем преломления  $n_1=2,3$  на подложку с  $n_2=1,51$  при выборе  $\alpha=1000$  и  $\beta=2$  значение относительной погрешности  $c=0,75\%$ , тогда как при нанесении слоя с  $n_1=1,6$  на ту же подложку  $c=3\%$ .

При контроле толщины слоев многослойного покрытия, если коэффициент усиления усилителя в течение всего технологического процесса остается неизменным, относительная погрешность, очевидно, будет различна для каждого слоя, а характер ее распределения будет определяться структурой покрытия. Формулы (174)—(177) можно использовать только для расчета ошибки в определении толщины однослойного покрытия. Однако уже для двухслойного покрытия не удастся получить обозримые аналитические выражения. Поэтому вычисление распределения ошибок в толщине слоев многослойного покрытия выполняется с помощью моделирования процесса контроля толщины слоев на ЭВМ [13].

### 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ЭВМ ПРОЦЕССА КОНТРОЛЯ ТОЛЩИН СЛОЕВ ФОТОМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Рассмотрим процесс моделирования фотометрического контроля при изготовлении многослойного покрытия (рис. 34).

В блоке 1 вводится необходимая для организации вычислительного процесса информация: структура покрытия; переменная



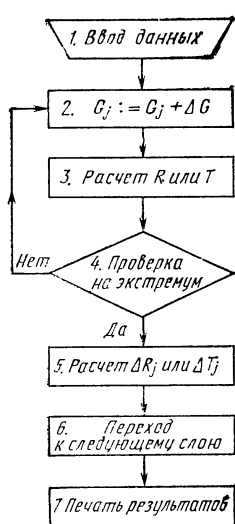


Рис. 34. Блок-схема программы моделирования процесса фотометрического контроля

целого типа, задающая способ регистрации интенсивности контрольного излучения; значение шага  $\delta G$ , с которым увеличивается оптическая толщина слоя; массивы чисел, определяющие номера экстремумов, при достижении которых следует прекратить «нанесение» слоев, относительные погрешности в регистрации интенсивности контрольного сигнала  $c_j$ . Для формирования массива  $G_j$  необходимо предварительно вычислить, начиная от подложки, коэффициенты отражения  $R_j(\lambda_k)$  или пропускания  $T_j(\lambda_k)$  последовательно на всех границах слоев. При этом  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  полагаются известными.

В блоках 2 и 3 дается приращение толщины  $j$ -го слоя и вычисляется коэффициент отражения или пропускания в зависимости от выбранного режима работы контроля, соответствующий этому приращению.

В блоке 4 проверяется условие достижения экстремума. Если экстремум не достигнут, то толщина слоя продолжает увеличиваться; если же экстремум зафиксирован, то вычисляется абсолютная ошибка  $\Delta R_j = R_{aj}c_j$  или  $\Delta T_j = T_{aj}c_j$  (блок 5). Продолжение вычислений с тем же шагом до выполнения одного из условий (169) позволяет определить оптическую толщину слоя, соответствующую моменту прекращения его «нанесения». Определение экстремумов коэффициентов отражения или пропускания осуществляется при ранее вычисленных толщинах лежащих ниже слоев и тем самым автоматически учитывается влияние ошибок в толщине ранее нанесенных слоев на значение ошибки в определении толщины контролируемого слоя. Коэффициенты отражения и пропускания в этом случае удобно вычислять по рекуррентным формулам (69)—(72).

В блоке 6 осуществляется переход к следующему  $(j-1)$ -му слою.

В блоке 7 производится распечатка вычисленных оптических толщин слоев и соответствующей спектральной характеристики покрытия. Вычисленные по этой программе значения оптических толщин однослойных покрытий при различных относительных ошибках и при различных способах контроля приведены в табл. 11. Как показывает сравнение, при  $c \leq 2\%$  ошибки в определении толщины слоев, вычисленные по формулам (174)—(177) и в ходе моделирования, совпадают. Если  $c > 2\%$ , то при выводе формул в разложении (171) необходимо учитывать члены ряда более вы-

Таблица 11

Оптическая толщина слоев, вычисленная в результате моделирования процесса фотометрического контроля ( $n_0=1$ ;  $n_2=1,51$ )

Способ контроля	$c, \%$	Показатель преломления слоя			
		2,3	1,8	1,65	1,35
$R_{\lambda_k/4}$	0,5	0,264	0,264	0,266	0,256
	2	0,278	0,279	0,283	0,262
	5	0,295	0,296	0,302	0,268
	10	0,314	0,315	0,325	0,276
$R_{\lambda_k/2}$	0,5	0,504	0,507	0,511	0,513
	2	0,508	0,514	0,522	0,526
	5	0,512	0,523	0,535	0,541
	10	0,517	0,532	0,550	0,559
$T_{\lambda_k/4}$	0,5	0,271	0,287	0,306	0,313
	2	0,293	0,325	0,369	—
	5	0,318	0,375	—	—
	10	0,347	0,466	—	—
$T_{\lambda_k/2}$	0,5	0,518	0,535	0,556	0,564
	2	0,537	0,572	0,618	—
	5	0,56	0,628	—	—
	10	0,59	—	—	—

сокого порядка. Прочерки в табл. 11 указывают на то, что при достаточно близких значениях показателей преломления слоя и подложки не удастся зафиксировать момент окончания нанесения слоя. Это связано с тем, что погрешность в регистрации экстремума интенсивности прошедшего сигнала  $\Delta T$  оказывается больше расстояния между соседними экстремумами. Если такая ситуация возникает на практике, то необходимо либо изменить режим работы устройства контроля, либо уменьшить величину  $c_T$  за счет увеличения коэффициента усиления усилителя, либо использовать контрольную подложку с другим показателем преломления.

Большим преимуществом машинного моделирования при расчете погрешности в определении толщины слоя является также то, что с его помощью удастся легко оценить влияние поглощения в материале слоев и неоднородность показателя преломления. Следует заметить, однако, что малое поглощение в диэлектрической пленке не оказывает значительного влияния на погрешность при

**Оптическая толщина однородного и неоднородного слоев, вычисленная в результате моделирования процесса фотометрического контроля ( $n_0=1$ ;  $n_2=1,51$ ;  $c=2\%$ )**

Слой	Способ контроля			
	$R_{\lambda_K/4}$	$R_{\lambda_K/2}$	$T_{\lambda_K/4}$	$T_{\lambda_K/2}$
Однородный	0,2778	0,5107	0,3065	0,5526
Неоднородный	0,2726	0,5107	0,3010	0,5526

определении ее толщины. Поглощение в материале слоев необходимо учитывать при моделировании процесса контроля многослойных покрытий, особенно структур резонансного типа, например узкополосных фильтров. Значительно большее влияние на погрешность в определении толщины слоя оказывает неоднородность показателя преломления, особенно, когда контроль осуществляется по регистрации нечетных экстремумов. Это хорошо видно из табл. 12, в которой приведены вычисленные значения оптической толщины однородного слоя с  $n_1=1,98$  и неоднородного слоя, показатель преломления которого был выбран изменяющимся по закону  $n_1=1,98+0,2\exp(-10G)$ .

Слои наносились на подложку, имеющую  $n_2=1,51$  при различных способах регистрации контрольного излучения и при  $c_2=2\%$ .

Ниже будут рассмотрены результаты моделирования процесса контроля толщины слоев фотометрическим методом некоторых многослойных покрытий, которые помогут лучше понять описанную методику и оценить перспективность использования ее на практике.

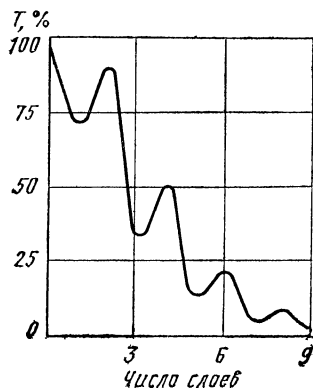


Рис. 35. Изменение коэффициента пропускания контрольного излучения при нанесении девяти слоев четвертьволновой оптической толщины с чередующимися высоким и низким показателями преломления ( $n_0=1,00$ ;  $n_B=2,30$ ;  $n_H=1,35$ ;  $n_{II}=1,52$ )

**Отражающее покрытие.** Рассмотрим контроль толщин слоев покрытия со следующей структурной формулой:

$$\Pi (BH)^4 B,$$

при  $n_0=1$ ;  $n_B=2,3$ ;  $n_H=1,35$ ;  $n_{10}=n_{\Pi}=1,52$ .

На кривой изменения коэффициента пропускания контрольного сигнала  $T$  в зависимости от числа слоев (рис. 35) видно, что с увеличением числа слоев уменьшается различие между соседними экстремумами и уменьшается их острота. Это означает, что уменьшается точность, с которой фиксируется момент окончания нанесения очередного слоя. Из рисунка также следует, что погрешность регистрации экстремумов интенсивности контрольного сигнала при нанесении слоев с высоким показателем преломления меньше, чем погрешность при нанесении слоев с низким показателем преломления. При этом наименьшая погрешность имеет место при нанесении третьего, считая от подложки, слоя.

Предположим, что коэффициент усиления усилителя в течение всего процесса изготовления покрытия остается неизменным. Для определенности положим  $\alpha=1500$  и  $\beta=2$ . Такой выбор параметра  $\alpha$  соответствует приблизительно 400 делениям, проходимым стрелкой гальванометра при нанесении слоя с высоким показателем преломления на чистую подложку. Значения относительной погрешности в регистрации экстремумов интенсивности контрольного излучения при нанесении всех девяти слоев сведены в табл. 13; там же приведены оптические толщины слоев покрытия, полученные в результате моделирования работы блока фотометрического контро-

Т а б л и ц а 13

**Оптические толщины слоев отражающего покрытия, вычисленные в результате моделирования процесса фотометрического контроля ( $n_0=1$ ;  $n_{10}=1,52$ )**

Номер слоя	$n_j$	$c_j, \%$	Оптические толщины слоев в частях $\lambda_K$	
			Контроль $T_{\lambda_K} / 4$	Контроль $R_{\lambda_K} / 2$
1	2,3	2,29	0,2945	0,2384
2	1,35	4,17	0,278	0,3764
3	2,3	0,86	0,2524	0,292
4	1,35	1,62	0,2675	0,2785
5	2,3	0,39	0,2504	0,269
6	1,35	0,79	0,263	0,2597
7	2,3	0,26	0,247	0,2603
8	1,35	0,73	0,2662	0,2523
9	2,3	0,57	0,2728	0,2652

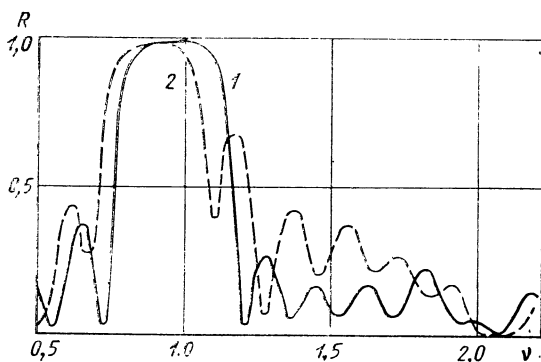


Рис. 36. Спектральные зависимости коэффициента отражения девятислойного покрытия:

1, 2 — моделирование процесса фотометрического контроля в режиме измерения прошедшего и отраженного сигналов соответственно

ля в режиме измерения прошедшего и отраженного сигналов. Из таблицы следует, что наибольшая погрешность возникает при контроле толщины предпоследнего слоя. Особенно она велика при контроле по отраженному сигналу.

Спектральные характеристики этого покрытия, полученные при различных способах контроля толщины слоев, показаны на рис. 36. На рисунке видно, что ошибки в определении толщин слоев приводят к некоторому сдвигу области высокого отражения в длинноволновую сторону. При этом максимальное значение коэффициента отражения покрытия, толщина слоев которого контролировалась по измерению отраженного излучения, оказалось несколько меньше [ $R(\nu=0,89)=97,81\%$ ], чем у покрытия с толщиной слоев, контролируемой по измерению прошедшего сигнала [ $R(\nu=0,96)=98,38\%$ ]. На рисунке также видно, что наиболее сильно искажается область вторичных максимумов отражения.

**Узкополосный фильтр.** Поведение оптических характеристик при наличии ошибок в толщине слоев исследуем на примере 17- и 19-слойных фильтров первого порядка, состоящих из диэлектрических материалов со следующими структурными формулами:

$$\Pi (BH)^4 2B (NB)^4; \quad (179a)$$

$$\Pi (BH)^4 B 2NB (NB)^4, \quad (179б)$$

при  $n_0=1$ ;  $N_B=2,3-i0,001$ ;  $n_N=1,35$ ;  $n_\Pi=1,51$  [6].

При отсутствии ошибок в толщине слоев эти фильтры в максимуме полосы пропускания имеют одинаковые коэффициенты пропускания  $T_{\max}$  и поглощения  $A_{\max}$ . Однако уже при погрешности

**Оптические характеристики узкополосных фильтров, полученные в результате моделирования процесса фотометрического контроля при  $c_f=2\%$  ( $\nu_{\max}$ —нормированная длина волны максимума полосы пропускания)**

Структурная формула фильтра	Способ контроля	$T_{\max}, \%$	$A_{\max}, \%$	$\nu_{\max}$	$\delta\nu$
(179a)	$T_{\lambda_K/4}$	81,28	15,5	0,9999	0,0057
	$R_{\lambda_K/4}$	83,02	12,44	0,999	0,01
(179б)	$T_{\lambda_K/4}$	81,43	15,99	0,9999	0,0034
	$R_{\lambda_K/4}$	72,18	12,72	0,9985	0,0084

$c=2\%$  характеристики фильтров заметно различаются (табл. 14). Из таблицы следует, что при контроле  $T_{\lambda_K/4}$  имеет место полная взаимная компенсация ошибок в толщине слоев, в результате которой длина волны максимума полосы пропускания  $\lambda_{\max}$  фильтров практически точно совпадает с контрольной длиной волны  $\lambda_K$ .

Приведенные результаты указывают также на принципиальную возможность контролирования толщины слоев узкополосного фильтра по регистрации экстремумов интенсивности отраженного контрольного излучения. Однако при таком способе контроля оптические характеристики фильтра оказываются значительно хуже. Прежде всего в этом случае ошибки в определении толщин слоев компенс-

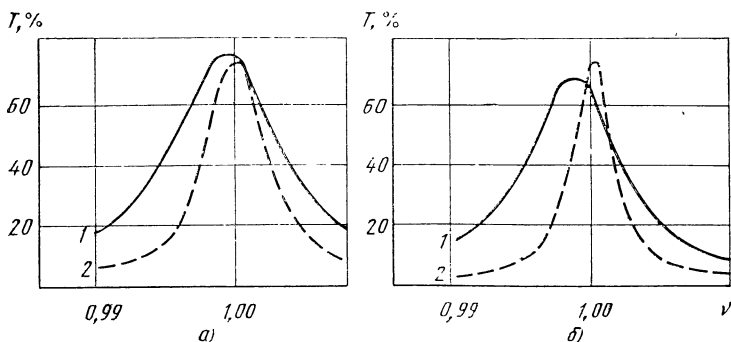


Рис. 37. Спектральные зависимости коэффициента пропускания узкополосных фильтров (контроль  $R_{\lambda_K/4}$  — кривые 1; контроль  $T_{\lambda_K/4}$  — кривые 2):

а — фильтр типа (179a); б — фильтр типа (179б)

руются неполностью, в результате чего максимум полосы пропускания оказывается сдвинутым в длинноволновую область спектра. При этом полуширина полосы пропускания  $\delta\nu$  возрастает более чем вдвое, а контрастность, как видно из рис. 37, значительно хуже, чем у фильтров, контроль толщины слоев которых осуществлялся по измерению прошедшего через покрытие контрольного излучения. Заметим, что использование контроля типа  $R_{\lambda_k/2}$  или  $T_{\lambda_k/2}$  вообще не позволяет сформировать структуру узкополосного фильтра.

Из табл. 15, где приведены результаты моделирования процесса контроля толщины слоев фильтров обоих типов с различной точностью позволяющие оценить допуски на чувствительность фотометрической аппаратуры, следует, что при  $c < 5\%$  ошибки в определении толщины слоев оказываются взаимно скомпенсированными. Такие ошибки приводят к некоторому увеличению  $T_{\max}$ , однако вместе с этим растет  $\delta\nu$ , причем у фильтра с разделительным слоем, выполненным из материала с высоким показателем преломления, она растет быстрее, чем у фильтра, определяемого формулой (179б).

Значения оптической толщины слоев фильтров, полученные в результате моделирования при  $c_T = c_R = 2\%$ , приведены в табл. 16. Представленные в этой таблице результаты позволяют сравнить распределение ошибок в толщине слоев фильтров обоих типов, возникающих при различных способах контроля. Можно отметить некоторые характерные особенности. Прежде всего отклонение толщины разделительного слоя от номинального значения оказывается намного меньше, чем у крайних слоев. При этом знак и величина отклонения зависят от типа фильтра. Как показывают дополнительные расчеты, ошибка в определении толщины разделительного слоя слабо

Таблица 15

**Оптические характеристики узкополосных фильтров, полученные в результате моделирования процесса фотометрического контроля в режиме измерения интенсивности прошедшего сигнала при различных значениях  $c_T$**

$c_T$	$T_{\max}, \%$		$A_{\max}, \%$		$\nu_{\max}$		$\delta\nu$	
	Структурная формула фильтра							
	(179a)	(179б)	(179a)	(179б)	(179a)	(179б)	(179a)	(179б)
0	74,34	74,34	16,82	16,82	1	1	0,0032	0,0019
0,5	77,34	76,35	16,73	16,63	1	1	0,0051	0,0029
2	81,28	81,43	15,5	15,99	0,9999	0,9999	0,9999	0,0034
5	85,9	85,99	12,51	13,35	0,9994	0,9995	0,0076	0,0037
10	90,21	91	7,6	8,49	0,9981	0,9984	0,0118	0,0077

Оптическая толщина слоев узкополосных фильтров, полученная в результате моделирования процесса фотометрического контроля в различных режимах ( $n_0=1$ ;  $n_{\Pi}=1,51$ ;  $c=2\%$ )

Номер слоя	Структурная формула фильтра (179а)			Номер слоя	Структурная формула фильтра (179б)		
	$n_j$	$T_{\lambda_K/4}$	$R_{\lambda_K/4}$		$n_j$	$T_{\lambda_K/4}$	$R_{\lambda_K/4}$
1	2,3	0,180	0,172	1	2,3	0,183	0,159
2	1,35	0,264	0,28	2	1,35	0,264	0,287
3	2,3	0,201	0,15	3	2,3	0,203	0,138
4	1,35	0,265	0,293	4	1,35	0,265	0,3
5	2,3	0,205	0,13	5	2,3	0,205	0,121
6	1,35	0,265	0,306	6	1,35	0,265	0,312
7	2,3	0,206	0,116	7	2,3	0,205	0,117
8	1,35	0,265	0,317	8	1,35	0,265	0,323
9	2,3	0,496	0,483	9	2,3	0,206	0,106
10	1,35	0,261	0,265	10	1,35	0,519	0,568
11	2,3	0,259	0,316	11	2,3	0,26	0,45
12	1,35	0,218	0,259	12	1,35	0,261	0,265
13	2,3	0,258	0,297	13	2,3	0,259	0,316
14	1,35	0,264	0,255	14	1,35	0,261	0,259
15	2,3	0,256	0,283	15	2,3	0,258	0,297
16	1,35	0,276	0,252	16	1,35	0,264	0,255
17	2,3	0,293	0,279	17	2,3	0,256	0,283
				18	1,35	0,276	0,252
				19	2,3	0,293	0,279

зависит от поглощения в материале слоев и изменения порядка интерференции фильтра. В наибольшей степени в этом случае изменится толщина внешних слоев зеркального покрытия, удаленного от подложки.

Приведенные результаты дают возможность проанализировать механизм компенсации ошибок в толщине слоев фильтрующей системы (рис. 38).

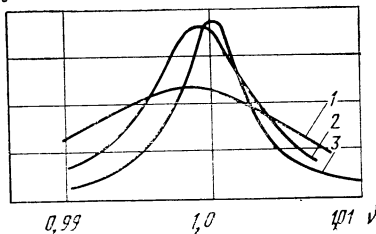
 $\xi, \%$ 


Рис. 38. Формирование полосы пропускания узкополосного фильтра типа (179а) ( $n_0=1$ ;  $40 n_{\Pi}=1,51$ ;  $c=2\%$ ):  
1, 2, 3 — после нанесения 5, 3 20 и 1 слоев соответственно



Поскольку толщина всех слоев зеркального покрытия, ближайшего к подложке, больше своих номинальных значений, следовательно, максимум коэффициента отражения будет сдвинут в длинноволновую сторону. Заметное расщепление области высокого отражения, т. е. формирование полосы пропускания фильтра, начинается при нанесении двух слоев второго отражающего покрытия, следующего за разделительным слоем (слои 7 и 8). В этом случае максимальный коэффициент пропускания  $T_{\max}=21,5\%$  расположен на  $v_{\max}=0,9954$ ; при нанесении следующей пары слоев (5 и 6)  $T_{\max}=50,47\%$  расположен на  $v_{\max}=0,9976$ ; при нанесении слоев 3 и 4  $T_{\max}=78,97\%$  расположен на  $v_{\max}=0,999$ . Наконец, при нанесении двух последних слоев длина волны максимума коэффициента пропускания фильтра точно совпадает с длиной волны контрольного излучения. Таким образом, компенсация влияния ошибок в толщине слоев на спектральное положение максимума полосы пропускания узкополосного фильтра осуществляется в пределах всей структуры, и, кроме того, малое поглощение в материале слоев не влияет на компенсацию ошибок.

*Коротковолновый фильтр.* Рассмотрим особенности контроля толщины слоев в процессе изготовления коротковолнового фильтра со структурной формулой

$$P0,5C(BH)^6B0,5H,$$

при  $n_0=1$ ;  $n_B=2,2$ ;  $n_H=1,45$ ;  $n_C=1,65$ ;  $n_P=n_{16}=1,51$  [12].

При изготовлении фильтров этого типа контрольную длину волны, как правило, выбирают в полосе прозрачности, а именно на  $v_K=2$ . Тогда толщина крайних слоев контролируется по регистрации нечетных экстремумов интенсивности контрольного сигнала, а внутренних слоев — по достижении четных экстремумов. Такой выбор контрольной длины волны связан с необходимостью учета дисперсии показателей преломления слоев, образующих покрытие.

Действительно, наличие дисперсии (разной у разных материалов) приводит к тому, что оптические толщины слоев достигают своих номинальных значений только на одной длине волны, а именно на контрольной длине волны  $v_K=2$ .

В табл. 17 приведены параметры слоев коротковолнового фильтра, номера экстремумов  $p$ , при достижении которых заканчивается нанесение слоя, и значение погрешности  $c_j$  при измерении интенсивности контрольного излучения. Из сопоставления приведенных в табл. 17 данных следует, что ошибка в определении толщины слоев с низкими показателями преломления особенно велика при контроле интенсивности прошедшего сигнала. Наличие этих ошибок приводит к значительному сдвигу спектральной характеристики в длинноволновую сторону, увеличению остаточного коэффициента

Таблица 17

Оптические толщины слоев коротковолнового фильтра, вычисленные в результате моделирования процесса оптического контроля ( $n_0=1$ ;  $n_{16}=1,51$ )

Номер слоя	$n_j$	$p$	$c_j$	Оптическая толщина слоев при контроле	
				$T_{\lambda_K/2}$	$R_{\lambda_K/2}$
1	1,45	1	1,31	0,2054	0,1325
2	2,2	2	0,39	0,2685	0,2588
3	1,45	2	0,66	0,3155	0,2612
4	2,2	2	0,39	0,2686	0,259
5	1,45	2	0,66	0,3148	0,2612
6	2,2	2	0,39	0,2688	0,2593
7	1,45	2	0,66	0,3137	0,2611
8	2,2	2	0,39	0,2691	0,2596
9	1,45	2	0,66	0,3115	0,261
10	2,2	2	0,39	0,2697	0,2598
11	1,45	2	0,66	0,3082	0,2608
12	2,2	2	0,39	0,2709	0,2602
13	1,45	2	0,66	0,303	0,2607
14	2,2	2	0,39	0,271	0,2609
15	1,65	1	2,45	0,1925	0,1433

отражения в полосе прозрачности, а также появлению аномально большого пика отражения вблизи контрольной длины волны. Напротив, если контроль толщины слоев осуществляется по регистрации

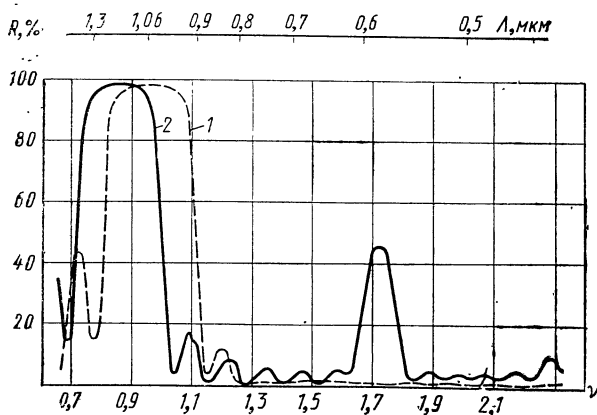


Рис. 39. Спектральные зависимости коэффициента отражения 15-слойного коротковолнового фильтра ( $n_0=1$ ;  $n_{16}=1,52$ ):

1, 2 — моделирование процесса фотометрического контроля в режиме измерения отраженного и прошедшего сигналов соответственно

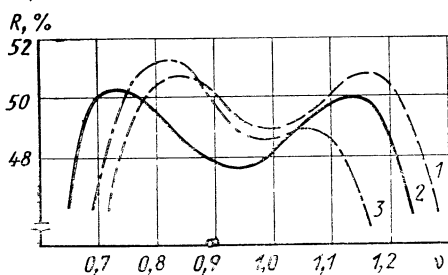


Рис. 40. Спектральные зависимости коэффициента отражения четырехслойного светоделительного покрытия ( $n_0=1$ ;  $n_5=1,52$ ):

1 — оптимальная конструкция; 2, 3 — моделирование работы фотометрического контроля в режиме измерения отраженного и прошедшего сигналов соответственно

экстремумов интенсивности отраженного сигнала, то спектральная характеристика покрытия остается близкой к оптимальной (рис. 39).

**Широкополосное светоделительное покрытие.** На рис. 40 приведена спектральная характеристика светоделительного покрытия ( $R=50\%$ ) на стекле с  $n_5=1,52$ , охватывающего видимую часть спектра. В табл. 18 представлены структура покрытия, погрешности в регистрации контрольного излучения для  $\alpha=3000$  и  $\beta=2$  и оптические толщины слоев, полученные в результате моделирования. Соответствующие спектральные зависимости коэффициента отражения приведены на рис. 40. На рисунке видно, что в наибольшей степени искажается спектральная характеристика покрытия, полученного при контроле толщины слоев по измерению интенсивности прошедшего сигнала.

Рассмотренные выше примеры показывают, что численное моделирование процесса фотометрического контроля позволяет прогнозировать характер искажений спектральной зависимости коэффициентов отражения или пропускания покрытия, вызванных вариациями

Таблица 18

**Оптические толщины слоев широкополосного светоделительного покрытия, вычисленные в результате моделирования процесса фотометрического контроля ( $n_0=1$ ;  $n_5=1,52$ )**

Номер слоя	$n_j$	$c_j$	Оптическая толщина слоев при контроле	
			$R_{\lambda_k}/4$	$T_{\lambda_k}/4$
1	2,29	0,27	0,261	0,2433
2	1,38	1,13	0,2591	0,3163
3	2,29	1,85	0,233	0,2367
4	1,97	0,9	0,2686	0,288

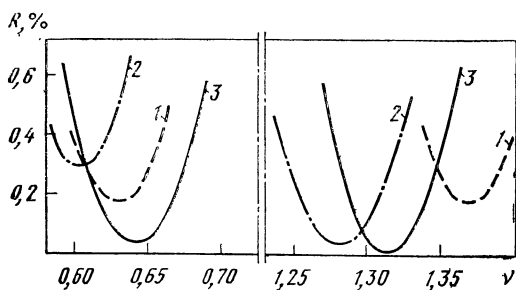


Рис. 41. Спектральные зависимости коэффициента отражения трехслойного просветляющего покрытия на две длины волны ( $n_0=1$ ;  $n_4=1,52$ ;  $c=2\%$ ):

1 — нулевое приближение; 2, 3 — после моделирования и оптимизации соответственно

толщин слоев, и исключить заведомо неустойчивые решения. Однако если характеристика покрытия искажается не очень сильно, то в некоторых случаях оказывается целесообразным провести дополнительную оптимизацию этой характеристики, но уже с учетом ошибок, возникающих в толщине слоев при их контроле. Это имеет смысл при конструировании и изготовлении прецизионных покрытий, например просветляющих с очень малым остаточным коэффициентом отражения. Основная идея заключается в том, чтобы соответствующим изменением показателей преломления слоев в исходной конструкции покрытия скомпенсировать нежелательное искажение его характеристики, вызванное ошибками в толщине слоев. В этом случае в качестве нулевого приближения принимается конструкция покрытия, полученная в результате моделирования. Изменение показателей преломления можно выполнить по описанному ранее методу конфигураций [36].

В качестве примера рассмотрим оптимизацию трехслойного покрытия, уменьшающего коэффициент отражения от поверхности стекла с показателем преломления  $n_4=1,52$  на длинах волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , связанных отношением  $\lambda_1/\lambda_2=2$ . На рис. 41 приведена спектральная характеристика просветляющего покрытия, состоящего из слоев четвертьволновой толщины с показателями преломления  $n_1=1,45$ ;  $n_2=1,58$  и  $n_3=2,00$ . Из рисунка видно, что отношение длин волн, на которых коэффициент отражения имеет минимальные значения, приблизительно равно 2,18. На этом же рисунке показана спектральная зависимость коэффициента отражения такого покрытия, полученного в результате моделирования процесса фотометрического контроля с погрешностью  $c=2\%$ . При этом минимальные коэффициенты отражения  $R_1=0,29\%$  и  $R_2=0,07\%$  достигаются в точках  $\nu_1=0,6$  и  $\nu_2=1,29$ .

Таблица 19

**Конструктивные параметры трехслойного просветляющего покрытия, полученные в результате оптимизации с учетом ошибок в толщинах слоев ( $n_0=1$ ;  $n_4=1,52$ ;  $c_l=2\%$ )**

Номер шага	Показатель преломления слоя			Оптическая толщина слоя			$F(x)$ , %
	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$G_1$	$G_2$	$G_3$	
0	1,45	1,58	2,00	0,2731	0,2366	0,2778	0,544
1	1,45	1,58	2,01	0,2729	0,2368	0,2777	0,596
2	1,45	1,58	1,99	0,2733	0,2362	0,2779	0,495
3	1,45	1,59	1,99	0,2736	0,2358	0,2779	0,430
4	1,46	1,59	1,99	0,2736	0,2358	0,2779	0,441
5	1,44	1,59	1,99	0,2735	0,2358	0,2779	0,427
6	1,43	1,60	1,98	0,2738	0,2351	0,2779	0,338
7	1,42	1,61	1,97	0,2731	0,2353	0,2779	0,273
14	1,41	1,64	1,94	0,2702	0,2359	0,278	0,137
18	1,45	1,68	1,90	0,2665	0,2367	0,278	0,067
25	1,44	1,66	1,93	0,2692	0,2362	0,278	0,040
31	1,44	1,66	1,92	0,2635	0,2363	0,278	0,035

Значения оптической толщины слоев, полученные в результате моделирования, и значение целевой функции приведены в первой строке табл. 19. В остальной части таблицы представлена распечатка нескольких итерационных шагов, позволяющая проследить ход оптимизации данного покрытия. Целевая функция (160) минимизировалась в точках  $v_1=0,64$  и  $v_2=1,28$ . Значение шага при изменении показателей преломления слоев и критерий окончания поиска полагались равными 0,01. Из таблицы следует, что при учете ошибок в толщине слоев, вычисленных при  $c_l=2\%$ , оптимальной является структура покрытия с показателями преломления слоев  $n_1=1,44$ ;  $n_2=1,66$ ;  $n_3=1,92$ , спектральная характеристика которого показана на рис. 41. Минимальные коэффициенты отражения в этом случае составляют  $R_1=0,034\%$  и  $R_2=0,036\%$ .

В заключение отметим, что прогон программы, моделирующей процесс фотометрического контроля в процессе изготовления 15—17-слойного покрытия, занимает около 3 мин, тогда как для изготовления такого покрытия в общей сложности требуется 3—4 ч. Однако при анализе результатов моделирования и сопоставления их с экспериментальными характеристиками покрытия следует иметь в виду, что достоверность полученных результатов определяется полнотой информации о структуре покрытия. Здесь важно знать, насколько точно в экспериментальных условиях воспроизводятся показатели преломления слоев, из которых состоит покрытие, и иметь

оценки их неоднородности. Кроме того, необходимо правильно выбрать коэффициент усиления усилителя и учесть его возможное изменение в процессе изготовления покрытия.

#### **4. КОНТРОЛЬ ТОЛЩИН СЛОЕВ МЕТОДОМ КВАРЦЕВОГО РЕЗОНАТОРА**

Этот метод основан на измерении отклонения резонансной частоты резонатора, обусловленного нанесением на поверхность кварцевой пластины дополнительной массы. Резонатор представляет собой тонкую пластину, изготовленную из кристаллического кварца, к которой подводится переменное электрическое поле [9].

Резонансная частота кварцевого резонатора  $f_0$  связана с геометрическими размерами пластины следующим соотношением:

$$f_0 = k/t, \quad (180)$$

где  $k$  — частотный коэффициент, определяемый типом среза и формой кварцевой пластины;  $t$  — толщина пластины.

Определим сдвиг частоты, связанный с изменением толщины пластины. С этой целью продифференцируем формулу (180) по  $t$ :

$$df = -(k/t^2) dt. \quad (181)$$

Толщину кварцевой пластины можно вычислить по формуле

$$t = m/(Sp), \quad (182)$$

где  $m$  — масса пластины;  $S$  — площадь кварца;  $\rho$  — плотность кварца. Эта формула позволяет найти приращение толщины пластины:

$$dt = dm/(Sp). \quad (183)$$

Подставляя выражения (182) и (183) в формулу (181), получим соотношение, связывающее изменение частоты  $\Delta f$  и поверхностной плотности  $m/S$  осаждаемого на кварцевую пластину вещества:

$$\Delta f = -\frac{f_0^2 \Delta m}{k\rho S} = -\frac{k\Delta m}{\rho t^2 S} = -c_f \Delta m. \quad (184)$$

Из формулы (184) следует, что сдвиг частоты  $\Delta f$  прямо пропорционален изменению массы кристалла, достигаемой за счет осаждения на него дополнительной массы вещества  $\Delta m$ . Этот вывод остается справедливым, пока дополнительная масса  $\Delta m$  намного меньше массы пластины, так что рабочие поверхности остаются в пучности колебаний, т. е. осаждаемое вещество не накапливает энергию упругой деформации за период колебания. Коэффициент пропорциональности  $c_f$  в формуле (184) называется чувствительностью кристалла к определению массы. Колебательные свойства и массовые чувствительности АТ-срезом кристаллов кварца для различных частот можно найти в работе [9].

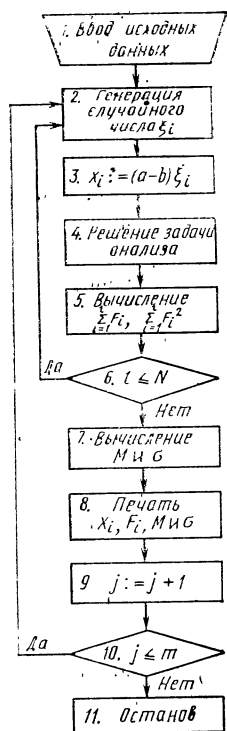


Рис. 42. Блок-схема программы анализа чувствительности характеристик интерференционного покрытия методом Монте-Карло

Из формулы (184) также следует, что более тонкие кварцевые пластины имеют более высокую резонансную частоту и большую чувствительность. Следовательно, выбор рабочей частоты зависит от выбора диапазона толщин наносимых пленок. Для измерения более тонких пленок желательны более высокие чувствительность и частота. Если же необходимо проводить измерения в большем диапазоне толщин и при этом сохранить линейность функции  $\Delta f(\Delta m)$ , то обычно выбирают кварц с более низкой резонансной частотой. Однако при этом чувствительность метода заметно снижается.

При выборе толщины кварцевой пластины и оценке чувствительности следует иметь в виду, что помимо ограничения, связанного с механической прочностью пластины, существует ограничение, согласно которому линейность функции  $\Delta f(\Delta m)$  существует лишь до тех пор, пока толщина осаждаемой пленки остается намного меньше толщины пластины. Обычно считается, что пластина толщиной порядка 0,3 мм с резонансной частотой в несколько мегагерц наилучшим образом удовлетворяет этим противоречивым требованиям [9]. При этом максимальное отклонение резонансной частоты кварцевого резонатора при осаждении вещества на пластину не превышает 0,1—0,2 МГц, после чего работа резонатора становится неустойчивой.

В отличие от фотометрического метода контроля при использовании метода кварцевого резонатора ошибки в определении толщины слоев являются статистически независимыми. Поэтому для оценки рассеяния характеристик покрытия можно использовать метод Монте-Карло. Заметим, что метод Монте-Карло может быть применен также для анализа устойчивости характеристик покрытия при отклонениях показателей преломления от оптимальных значений.

Алгоритм метода чрезвычайно прост. Согласно этому методу

задача анализа покрытия решается много раз подряд при случайным образом заданных параметрах слоев (рис. 42).

В блоке 1 вводится необходимая для организации расчета информация: данные о структуре покрытия, планируемое число испытаний  $N$ , границы интервала  $(a, b)$ , из которого параметр слоя принимает случайное значение, и номер слоя  $j$ , с которого начинается процесс моделирования.

В блоке 2 осуществляется генерация случайного числа в соответствии с принятым законом распределения.

В блоке 3 полученное случайное число присваивается соответствующему параметру слоя.

В блоке 4 рассчитывается характеристика покрытия и вычисляется значение целевой функции  $F_i(x)$  при  $i$ -м испытании.

В блоке 5 вычисленные значения  $F_i(x)$  используются для формирования сумм вида

$$\sum_{i=1}^N F_i(x); \quad \sum_{i=1}^N F_i^2(x).$$

В блоке 6 проверяется условие выполнения запланированного числа испытаний. Если это условие выполнено, то вычисляются числовые характеристики распределения целевой функции (блок 7):

$$M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i(x); \quad \sigma = \left[ \frac{1}{N-1} \left( \sum_{i=1}^N F_i^2(x) - NM^2 \right) \right]^{1/2},$$

где  $M$  и  $\sigma$  — математическое ожидание и дисперсия случайной величины  $F_i(x)$ .

В блоке 8 производится распечатка значений  $x_i$ ,  $F_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ),  $M$  и  $\sigma$ .

В блоке 9 осуществляется переход к следующему слою.

В блоке 10 проверяется условие окончания вычислительного процесса.

Существуют две трудности практической реализации метода Монте-Карло. Первая трудность связана с необходимостью проведения большого числа испытаний, так как статистическая погрешность оценок  $M$  и  $\sigma$  уменьшается очень медленно, обратно пропорционально корню квадратному из числа испытаний. Вторая трудность связана с получением информации о законах распределения ошибок в определении параметров слоев. Прежде всего это относится к показателям преломления слоев, значения которых зависят от многих технологических параметров, таких как температура нагрева подложек, скорость испарения и конденсации, остаточное давление газа в напылительной камере, наличие или отсутствие окислительной среды, чистота исходного сырья и других, между которыми, вообще говоря, имеется корреляционная связь.



Если закон распределения параметров слоев установлен, то его можно смоделировать на ЭВМ. Рассмотрим кратко некоторые способы формирования случайных величин с заданным законом распределения. Подробное описание способов получения последовательностей псевдослучайных чисел можно найти, например, в работе [35].

Почти все виды распределений можно получить, используя равномерное распределение (см. п. 3, гл. 2). Весьма распространенным законом распределения является нормальный. Один из известных способов генерации нормально распределенных величин основан на использовании центральной предельной теоремы. В наиболее простой и легко доказываемой формулировке эта теорема утверждает, что сумма  $N$  независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием  $M$  и дисперсией  $\sigma$  распределена асимптотически нормально (при  $N \rightarrow \infty$ ) с математическим ожиданием  $NM$  и дисперсией  $N\sigma$ .

Таким образом, если взять  $N$  значений из совокупности равномерно распределенных на интервале  $(0, 1)$  величин  $\xi_i$  с математическим ожиданием  $M=1/2$  и дисперсией  $\sigma=1/2$ , то из суммы  $N$  величин можно получить случайную величину  $\xi$ , распределенную нормально с  $M=N/2$  и  $\sigma=N/2$ . Следовательно, если взять  $N=12$ , то дисперсия будет равна единице. Если далее из этой суммы вычесть число 6, то математическое ожидание окажется равным нулю. Теперь, если  $\xi_i$  — равномерно распределенные на интервале  $(0, 1)$  случайные числа, то значения случайной величины, распределенной нормально с  $M=0$  и  $\sigma=1$  (нормированная и центрированная форма), можно вычислить по следующей формуле:

$$\xi = \sum_{i=1}^{12} \xi_i - 6.$$

Другие виды распределений можно получить, исходя из равномерного распределения, по так называемому способу обратной функции [35]. Этот способ основан на теореме, утверждающей, что если случайная величина  $x$  имеет непрерывную произвольную функцию распределения  $f(x)$ , то закон распределения случайной величины  $y=f_1(x)$  является равномерным на интервале  $(0, 1)$ . Следовательно, если построить функцию распределения  $f_1(x)$  и выбрать случайное значение  $y$  из равномерного распределения в интервале  $(0, 1)$ , то можно определить значение аргумента  $x$ , для которого  $f_1(x)=y$ . Полученная таким образом случайная величина  $x$  будет иметь заданную функцию распределения  $f_1(x)$ .

Аналитический способ решения этой задачи основан на обратном преобразовании  $x=f_1^{-1}(y)$ , где  $f_1^{-1}$  — функция, обратная функции  $f_1$ . Это уравнение сводится к решению интегрального уравнения относительно  $x_i$ :

$$\int_{-\infty}^{x_i} f(x) dx = y_i.$$

Для некоторых частных законов распределения это уравнение удастся решить непосредственно. Так, функция плотности экспоненциального распределения имеет вид

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

Воспользовавшись обратным преобразованием функции плотности, можно получить

$$x_i = (1/\lambda) \ln \xi_i.$$

Функция плотности вероятностей закона Вейбулла определяется выражением

$$f(x) = \frac{m(x-\gamma)^{m-1}}{x_0} e^{-\frac{(x-\gamma)^m}{x_0}}.$$

Соответствующее преобразование равномерно распределенной случайной величины  $\xi_i$  имеет вид

$$x_i = \sqrt[m]{-x_0 \ln(1-\xi_i)} + \gamma.$$

В качестве примера рассмотрим изменение целевой функции (160) трехслойного ахроматического просветляющего покрытия типа  $0,25\lambda_0-0,5\lambda_0-0,25\lambda_0$  с показателями преломления слоев  $n_1=1,38$ ;  $n_2=1,99$ ;  $n_3=1,62$  на стекле с показателем преломления  $n_4=1,51$  при изменении параметров всех слоев.

Предположим, что ошибки в определении показателей преломления и толщин слоев имеют нормальное распределение. В табл. 20 приведены результаты 20 вычислений целевой функции для каждого параметра и указаны среднее и дисперсия. Результаты этих расчетов можно представить в наглядном виде, построив диаграмму рассеяния целевой функции при варьировании каждого параметра покрытия. Такую диаграмму строят в виде относительного отклонения  $F(x)$  от значения целевой функции в точке минимума  $F(x^*)$  (рис. 43). Она по-

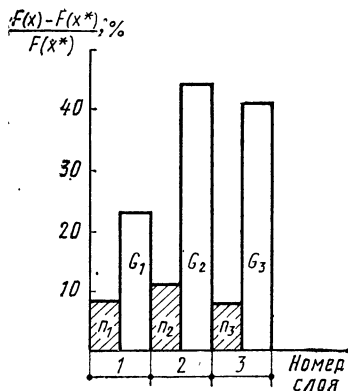


Рис. 43. Диаграмма рассеяния целевой функции для просветляющего покрытия типа  $0,25\lambda_0-0,5\lambda_0-0,25\lambda_0$ , построенная по результатам анализа методом Монте-Карло

Значения целевой функции просветляющего покрытия типа  
 $0,25 \lambda_0 - 0,5 \lambda_0 - 0,25 \lambda_0$  ( $n_0=1$ ;  $n_1=1,38$ ;  $n_2=1,99$ ;  $n_3=1,62$ ;  $n_4=1,51$ )

Слой 1		Слой 2		Слой 3	
$F(n_1), \%$	$F(G_1), \%$	$F(n_2), \%$	$F(G_2), \%$	$F(n_3), \%$	$F(G_3), \%$
0,2458	0,2623	0,2771	0,3553	0,2627	0,3476
0,2442	0,2620	0,2757	0,3542	0,2622	0,3467
0,2559	0,2679	0,2745	0,3537	0,2620	0,3459
0,2535	0,2679	0,2732	0,3526	0,2617	0,3451
0,2603	0,2751	0,2724	0,3523	0,2616	0,3444
0,2607	0,2768	0,2713	0,3516	0,2617	0,3437
0,2644	0,2835	0,2705	0,3513	0,2616	0,3430
0,2654	0,2873	0,2697	0,3508	0,2613	0,3422
0,2631	0,2868	0,2688	0,3498	0,2610	0,3414
0,2613	0,2864	0,2680	0,3488	0,2608	0,3407
0,2597	0,2858	0,2672	0,3478	0,2605	0,3340
0,2583	0,2852	0,2664	0,3468	0,2602	0,3392
0,2683	0,3096	0,2662	0,3484	0,2608	0,3388
0,2669	0,3092	0,2656	0,3475	0,2606	0,3381
0,2653	0,3084	0,2649	0,3466	0,2603	0,3374
0,2639	0,3076	0,2643	0,3457	0,2600	0,3367
0,2729	0,3344	0,2643	0,3478	0,2608	0,3363
0,2789	0,3532	0,2642	0,3492	0,2614	0,3359
0,2797	0,3564	0,2637	0,3492	0,2620	0,3356
0,2787	0,3564	0,2632	0,3485	0,2621	0,3350
$M = 0,2634$ $\sigma = 0,965 \times 10^{-4}$	$M = 0,2981$ $\sigma = 0,307 \times 10^{-4}$	$M =$ $= 0,2686$ $\sigma =$ $= 0,430 \times 10^{-4}$	$M =$ $= 0,3499$ $\sigma =$ $= 0,272 \times 10^{-4}$	$M =$ $= 0,2613$ $\sigma =$ $= 0,751 \times 10^{-4}$	$M =$ $= 0,3407$ $\sigma =$ $= 0,398 \times 10^{-4}$

звояет оценить относительную чувствительность характеристики покрытия к возмущению каждого параметра слоя.

#### ГЛАВА 4

### ПРОСВЕТЛЯЮЩИЕ ПОКРЫТИЯ

#### 1. ПРОСВЕТЛЯЮЩИЕ ПОКРЫТИЯ ДЛЯ ФИКСИРОВАННОЙ ДЛИНЫ ВОЛНЫ

Задача снижения коэффициента отражения от границы раздела двух различных оптически прозрачных сред на фиксированной дли-

не волны является наиболее простой в оптике тонкослойных покрытий. Практически все известные материалы можно просветлить, используя одно- или двухслойные покрытия. Под термином «просветление» в данном случае понимается возможность получения на некоторой заданной длине волны  $\lambda_0$  коэффициента отражения, по крайней мере теоретически равного нулю. Требование согласования двух сред с различными показателями преломления только в одной точке спектрального интервала, а также малое число слоев, необходимое для решения этой задачи, приводят к достаточно простым математическим выражениям, которые можно проанализировать аналитически, не прибегая к численным методам. Отметим, что различные вопросы, касающиеся теории и изготовления просветляющих покрытий для фиксированной длины волны, рассматривались во многих работах [16, 17, 47].

Однослойные просветляющие покрытия. Рассмотрим прозрачную пленку с показателем преломления  $n_1$ , нанесенную на прозрачную пленку с показателем преломления  $n_2$ . Если световая волна, распространяющаяся из среды с показателем преломления  $n_0$ , падает на пленку нормально, то амплитудный коэффициент отражения можно представить следующим образом:

$$r = \frac{n_0 b_{11} - n_2 b_{22} + i(n_0 n_2 b_{12} - b_{21})}{n_0 b_{11} + n_2 b_{22} + i(n_0 n_2 b_{12} + b_{21})}, \quad (185)$$

где элементы характеристической матрицы  $b_{ij}$  имеют вид

$$b_{11} = b_{22} = \cos \Phi; \quad b_{12} = (1/n_1) \sin \Phi; \quad b_{21} = n_1 \sin \Phi; \quad (186)$$

а  $\Phi$  — фазовая толщина слоя.

Поскольку знаменатель в формуле (185) не обращается в бесконечность, то для того чтобы коэффициент отражения принял нулевое значение, необходимо приравнять нулю действительную и мнимую части числителя. Тогда с учетом соотношения (186) получим систему уравнений

$$(n_0 - n_2) \cos \Phi = 0; \quad (n_0 n_2 / n_1 - n_1) \sin \Phi = 0. \quad (187)$$

Эта система уравнений имеет два решения. Первое решение:

$$n_0 = n_2 \text{ при } \Phi = l\pi, \quad l = 1, 2, \dots,$$

очевидно, не представляет интереса. Более важным является второе решение

$$n^2 = n_0 n_2 \text{ при } \Phi = (2l + 1) \pi / 2, \quad l = 1, 2, \dots \quad (188)$$

Обычно на практике выбирают  $l = 1$ . В этом случае оптическая толщина слоя равна четверти длины волны  $\lambda_0$ .

В общем случае, когда фазовая толщина слоя составляет нечетное число  $\pi$ , из формулы (185) с учетом выражений (186) не-

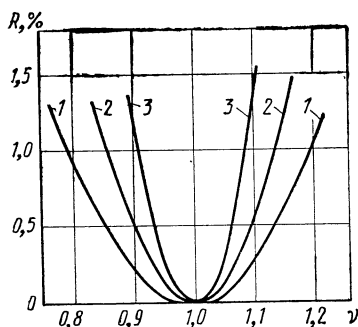


Рис. 44. Спектральные зависимости коэффициента отражения однослойных просветляющих покрытий для подложек с различными показателями преломления  $n_2$ :  
1 —  $n_2=1,9$ ; 2 —  $n_2=2,5$ ; 3 —  $n_2=4$

трудно получить выражение для коэффициента отражения (167). Если условие  $n_1^2 = n_0 n_2$  не выполняется, то формула (167) позволяет определить экстремальный коэффициент отражения, который, в зависимости от соотношения показателей преломления слоя и подложки будет максимальным или минимальным (см. рис. 31).

Набор пленочных материалов с низким показателем преломления ограничивается фторидом магния ( $n_1=1,38$ ) и криолитом ( $n_1=1,35$ ). По этой причине однослойные покрытия обычно применяют для просветления материалов с высокими показателями преломления. На рис. 44 приведены спектральные характеристики однослойных покрытий четвертьволновой оптической толщины, обеспечивающих нулевой коэффициент отражения от поверхности материалов с различными показателями преломления. На приведенных графиках можно видеть, что с увеличением показателя преломления подложки спектральная характеристика становится более крутой, а спектральная ширина области низкого отражения уменьшается.

Отметим одно интересное свойство однослойных покрытий [16]. Из формулы (188) следует, что при  $n_1^2 \neq n_0 n_2$ , т. е. когда  $R \neq 0$ , для любых значений  $n_0$  и  $n_2$  существует два значения показателя преломления слоя  $n'_1$  и  $n''_1$ , дающих одинаковые коэффициенты отражения в экстремальной точке. Эти значения связаны между собой условием  $n'_1 n''_1 = n_0 n_2$ , так что  $n'_1 \leq \sqrt{n_0 n_2}$  и  $n''_1 \geq \sqrt{n_0 n_2}$ . Покрытия с такими значениями показателей преломления дают тождественные спектральные зависимости коэффициентов отражения и пропускания, а также фазового сдвига, возникающего в прошедшей волне. Слои с показателями преломления  $n'_1$  и  $n''_1$  различаются только фазовым сдвигом, возникающим при отражении волны от покрытия.

Двухслойные просветляющие покрытия. Амплитудный коэффициент отражения двухслойного покрытия с показателями преломления слоев  $n_1$  и  $n_2$  можно также вычислить по формуле (185), заменив в ней показатель преломления подложки на  $n_3$ . Элементы матрицы интерференции в этом случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \cos \Phi_1 \cos \Phi_2 - (n_2/n_1) \sin \Phi_1 \sin \Phi_2; \\ b_{12} &= (1/n_2) \cos \Phi_1 \sin \Phi_2 + (1/n_1) \sin \Phi_1 \cos \Phi_2; \\ b_{21} &= n_2 \cos \Phi_1 \sin \Phi_2 + n_1 \sin \Phi_1 \cos \Phi_2; \\ b_{22} &= \cos \Phi_1 \cos \Phi_2 - (n_1/n_2) \sin \Phi_1 \sin \Phi_2. \end{aligned} \quad (189)$$

Для определения параметров слоев покрытия, обеспечивающего получение нулевого коэффициента отражения на длине волны  $\lambda_0$ , как и в случае однослойного покрытия, приравняем нулю действительную и мнимую части числителя формулы (185). Тогда с учетом соотношений (189) можно получить выражения для фазовых (следовательно, для оптических) толщин слоев в явной форме [46]:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \arctg \left( \pm n_1 \sqrt{\frac{A}{B} \frac{C}{D}} \right); \\ \Phi_2 &= \arctg \left( \pm n_2 \sqrt{\frac{A}{B} \frac{D}{C}} \right), \end{aligned} \quad (190)$$

где

$$\begin{aligned} A &= n_0 - n_3; \quad B = n_0 n_2^2 - n_1^2 n_3; \\ C &= n_0 n_3 - n_2^2; \quad D = n_1^2 - n_0 n_3. \end{aligned}$$

Для того чтобы фазовые толщины слоев имели физический смысл, подкоренные выражения в формулах (190) должны быть положительными. В данном случае достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{AC}{BD} > 0. \quad (191)$$

Заметим, что формулы (190) инвариантны относительно изменения порядка нумерации показателей преломления сред. Другими словами, двухслойное покрытие, обеспечивающее нулевой коэффициент отражения при падении световой волны из среды с показателем преломления  $n_3$ , будет также давать  $R(\lambda_0) = 0$ . Окружающей средой чаще всего является воздух, т. е.  $n_0 < n_3$ . Из сказанного следует, что достаточно ограничиться рассмотрением варианта, когда  $A < 0$ . В этом случае неравенство (191) удовлетворяется, если выполнено одно из следующих условий:

- а)  $B < 0$ ,  $C > 0$ ,  $D > 0$ ;  
 б)  $B < 0$ ,  $C < 0$ ,  $D < 0$ ;  
 в)  $B > 0$ ,  $C < 0$ ,  $D > 0$ ;  
 г)  $B > 0$ ,  $C > 0$ ,  $D < 0$ .

(192)

Анализ этих неравенств очень удобно выполнять графически с помощью диаграммы Шустера, представляющей собой зависимость показателя преломления внутреннего слоя от показателя преломления внешнего слоя при заданных значениях показателей преломления подложки и окружающей среды (рис. 45).

Вертикальная и горизонтальная линии на диаграмме являются графиками уравнений  $D=0$  ( $n_1^2 = n_0 n_3$ ) и  $C=0$  ( $n_2^2 = n_0 n_3$ ) и соответствуют просветляющим покрытиям, дающим нулевой коэффициент отражения. Диагональная линия представляет собой график уравнения  $B=0$  ( $n_0 n_2^2 = n_3 n_1^2$ ). Эта прямая соответствует двухслойному просветляющему покрытию, у которого оптические толщины обоих слоев равны четверти длины волны  $\lambda_0$ .

Указанные линии делят плоскость диаграммы на несколько областей, определяющих множество показателей преломления слоев, используя которые, можно сконструировать покрытие, обеспечивающее  $R(\lambda_0)=0$  при вещественных значениях фазовых толщин слоев. Эти области на диаграмме заштрихованы. Вне этих областей коэффициент отражения ни на каких длинах волн не будет равным нулю, хотя может принимать достаточно малые значения.

Таким образом, построив диаграмму Шустера для конкретных значений  $n_0$  и  $n_3$ , можно выбрать подходящую пару показателей преломления слоев, а затем по формулам (190) вычислить их фазовые толщины, обеспечивающие получение нулевого

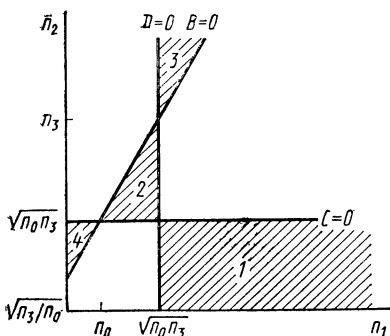


Рис. 45. Диаграмма Шустера ( $n_0 < n_3$ )

коэффициента отражения на фиксированной длине волны  $\lambda_0$ . Заметим, что расчет по формулам (190) дает четыре пары решений, однако лишь две из них обеспечивают  $R(\lambda_0)=0$ . Какие из полученных решений обеспечивают нулевое отражение, можно определить, подставив вычисленные значения толщин слоев в формулу (185), т. е. решив прямую задачу.

Анализ диаграммы позволяет также определить соотношение показателей преломления слоев. В области 1, ограниченной прямыми  $C=0$  и  $D=0$ , показатели преломления слоев удовлетворяют условиям  $n_1^2 > n_3$  и  $1 \leq n_2^2 \leq n_3$ , т. е. показатель преломления внешнего слоя больше показателя преломления внутреннего. В областях 2 и 3, наоборот, показатель преломления внутреннего слоя больше показателя преломления внешнего. Область 4 при  $n_0 \rightarrow 1$  становится исчезающе малой и при  $n_0=1$  обращается в точку.

При просветлении материалов с высокими значениями показателей преломления (таких, как германий, кремний, арсенид галлия и др.) можно сконструировать покрытия, у которых значения показателей преломления слоев расположены во всех трех областях диаграммы. Наибольший интерес представляют покрытия с показателями преломления слоев, принадлежащих области 1. У покрытий, попадающих в эту область, сумма оптических толщин слоев может быть меньше четверти длины волны  $\lambda_0$ . В ряде случаев это обстоятельство оказывается весьма полезным с точки зрения изготовления механически прочных и долговечных покрытий. Наименьший интерес при просветлении материалов с высоким показателем преломления представляют покрытия, у которых показатели преломления слоев принадлежат области 3 диаграммы, поскольку они имеют самую узкую спектральную область низкого отражения [16].

Практически реализуемые двухслойные просветляющие покрытия для различных стекол, имеющих относительно низкий показатель преломления, принадлежат области 3.

На рис. 46 построена диаграмма Шустера для  $n_0=1$  и  $n_3=1,52$ . На диаграмме заштрихована область, из которой выбирают показатели преломления слоев при конструировании реальных покрытий.

Если показатель преломления внешнего слоя выбрать равным  $n_1$ , то, как следует из диаграммы, для получения нулевого коэффициента отражения показатель внутреннего слоя должен удовлетворять условию  $n_2 \geq 1,23 n_1$ . При этом оптические толщины слоев для каждого значения  $n_2$  вычисляются по формулам (190).

Показатель преломления внешнего слоя желательно выбирать как можно меньшим, так как в

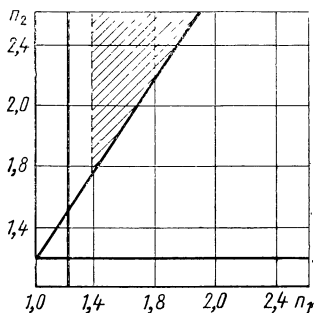


Рис. 46. Диаграмма Шустера для  $n_0=1$ ;  $n_3=1,52$



Оптические толщины слоев в частях  $\lambda_0$  двухслойного просветляющего покрытия ( $n_0 = 1$ ;  $n_1 = 1,45$ ;  $n_2 = 1,79 \dots 2,3$ ;  $n_3 = 1,52$ )

Показатель преломления $n_2$	Оптическая толщина слоя			
	1-е решение		2-е решение	
	$G'_1$	$G'_2$	$G''_1$	$G''_2$
1,79	0,25	0,25	0,25	0,25
1,8	0,2272	0,3021	0,2728	0,1979
1,9	0,1981	0,368	0,3019	0,132
2,0	0,1836	0,4064	0,3144	0,0936
2,1	0,1797	0,412	0,3203	0,088
2,2	0,173	0,4245	0,327	0,0755
2,3	0,1693	0,4331	0,3307	0,0669

этом случае расширяется спектральная область низкого отражения. На практике обычно значения  $n_1$  выбирают равными 1,38 или 1,45. Они соответствуют пленкам фторида магния и двуокиси кремния.

В табл. 21 приведены вычисленные значения оптических толщин слоев в частях  $\lambda_0$  двухслойного просветляющего покрытия для стекла с  $n_3 = 1,52$  при различных  $n_2$ . Оба приведенных решения обеспечивают коэффициент отражения  $R(\lambda_0) = 0$ . Заметим, что эти решения связаны между собой: достаточно найти одно решение, тогда второе можно получить при дополнении оптической толщины каждого из слоев до 0,5. Из табл. 21 видно, что по мере увеличения  $n_2$  скорость изменения оптических толщин уменьшается.

Хотя оба решения дают нулевой коэффициент отражения на длине волны  $\lambda_0$ , однако их спектральные характеристики заметно различаются, причем это различие увеличивается по мере увеличения  $n_2$ . На рис. 47 показаны спектральные зависимости коэффициента отражения рассматриваемого покрытия при выборе  $n_2 = 2,2$ .

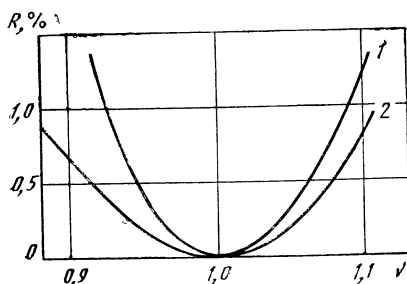
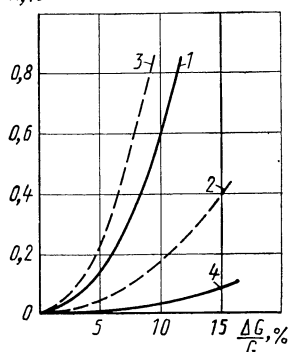


Рис. 47. Спектральные зависимости коэффициентов отражения двухслойного просветляющего покрытия ( $n_0 = 1$ ;  $n_1 = 1,45$ ;  $n_2 = 2,2$ ;  $n_3 = 1,51$ ):

1 —  $G_1 = 0,173$ ;  $G_2 = 0,4245$ ; 2 —  $G_1 = 0,327$ ;  $G_2 = 0,0755$

Рис. 48. Изменение коэффициента отражения двухслойного просветляющего покрытия при отклонении толщин внешнего (1, 2) и внутреннего (3, 4) слоев для первого (— — —) и второго (——) решений



На рисунке видно, что второе решение обеспечивает более широкую спектральную область низкого коэффициента отражения.

При конструировании покрытий важно знать, как будет меняться коэффициент отражения  $R(\lambda_0)$  при отклонении толщин слоев от оптимальных значений. Пусть  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — значения фазовых толщин слоев, при которых  $R(\lambda_0)=0$ . Тогда коэффициент отражения при изменении толщины каждого из слоев можно вычислить по формуле [46]

$$R = (x-2)/(x+2), \quad (193)$$

где

$$x = 2 + \left\{ \left( \frac{n_0}{n_1} - \frac{n_1}{n_0} \right) \sin \Delta\Phi_1 \right\}^2;$$

$$x = 2 + \left\{ \left( \frac{n_2}{n_3} - \frac{n_3}{n_2} \right) \sin \Delta\Phi_2 \right\}^2.$$

Здесь  $\Delta\Phi_1$  и  $\Delta\Phi_2$  представляют собой изменения фазовых толщин внешнего и внутреннего слоев соответственно.

Кривые, характеризующие изменение коэффициента отражения при отклонении толщины каждого слоя от оптимального значения для покрытия с  $n_1=1,45$  и  $n_2=2,20$ , показаны на рис. 48. При построении этих кривых предполагали, что при вариациях толщины одного слоя толщина другого слоя остается неизменной.

На графике видно, что для первого решения коэффициент отражения очень чувствителен к изменению толщины внутреннего слоя, а для второго решения характерна более высокая чувствительность коэффициента отражения к вариациям толщины внешнего слоя. Эти обстоятельства следует принимать во внимание при формировании требований к точности контроля толщин слоев в каждом конкретном случае.

Рассмотрим более подробно частный, но практически важный случай двухслойного просветляющего покрытия, у которого оптические толщины обоих слоев равны четверти длины волны  $\lambda_0$ . Как уже было сказано выше, покрытию этого типа соответствует уравнение  $B=0$  (см. рис. 45). Следовательно, для получения нулевого коэффициента отражения показатели преломления слоев должны удовлетворять условию  $n_0 n_2^2 = n_3 n_1^2$ . Если это условие не выполняется, то коэффициент отражения в минимуме не равен нулю. Его значение в этом случае можно вычислить по формуле

$$R = \left( \frac{n_1^2 n_3 - n_0 n_2^2}{n_1^2 n_3 + n_0 n_2^2} \right)^2. \quad (194)$$

Для оценки влияния степени рассогласования толщин слоев в покрытиях этого типа на значение коэффициента отражения можно также использовать формулу (193). В частности, анализ этой формулы показывает, что коэффициент отражения  $R(\lambda_0)$  очень чувствителен к изменению толщины внешнего слоя и сравнительно нечувствителен к вариациям толщины внутреннего слоя. Например, для равнотолщинного покрытия на стекле с  $n_3=1,52$ , у которого  $n_1=1,38$  и  $n_2=1,7$ , изменение оптической толщины внешнего слоя на 10% приводит к увеличению коэффициента отражения на 0,26%, а изменение толщины внутреннего слоя на ту же величину увеличивает коэффициент отражения всего лишь на 0,031%.

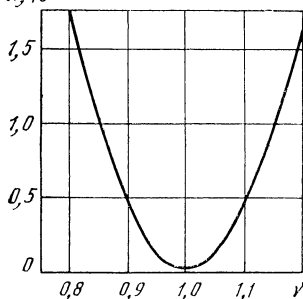
Однако на практике при изготовлении таких покрытий контроль толщин слоев чаще всего осуществляется по регистрации экст-

Т а б л и ц а 22

**Оптические толщины двухслойного равнотолщинного покрытия, полученные в результате моделирования процесса фотометрического контроля**  
( $n_0 = 1$ ;  $n_1 = 1,38$ ;  $n_2 = 1,7$ ;  $n_3 = 1,51$ )

$c_k, \%$	$G_1$	$G_2$	$R(\lambda_0), \%$
0	0,25	0,250	0
0,5	0,245	0,265	0
2	0,239	0,281	0
5	0,233	0,299	0,022
10	0,228	0,32	0,152

Рис. 49. Спектральная зависимость  $R, \%$  коэффициента отражения двухслойного равнотолщинного просветляющего покрытия ( $n_0=1$ ;  $n_1=1,38$ ;  $n_2=1,7$ ;  $n_3=1,52$ )



ремальных значений интенсивности контрольного излучения с длиной волны  $\lambda_K = \lambda_0$ . Поэтому более интересным представляется проанализировать ошибки в определении толщин слоев именно при таком способе контроля. В табл. 22 приведены значения оптических толщин слоев, полученные в результате моделирования работы блока фотометрического контроля при разной точности регистрации отраженного сигнала контрольного излучения [24].

Нетрудно заметить, что, несмотря на значительное отклонение оптических толщин от четвертьволновых значений, коэффициент отражения не претерпевает значительных изменений. В данном случае имеет место полная компенсация ошибок в определении толщин внутреннего слоя ошибкой в определении толщины внешнего слоя. Спектральная характеристика покрытия, полученная в результате моделирования при  $c_K = 2\%$ , показана на рис. 49.

## 2. ПРОСВЕТЛЯЮЩИЕ ПОКРЫТИЯ ДЛЯ ДВУХ ДЛИН ВОЛН

Задача конструирования покрытий, уменьшающих коэффициент отражения от поверхности оптически прозрачных материалов одновременно на двух длинах волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  с заданным отношением  $\lambda_1/\lambda_2$ , является значительно сложнее рассмотренной выше задачи конструирования просветляющих покрытий для одной длины волны. Опыт конструирования таких покрытий показал, что для получения нулевого или близкого к нулю коэффициента отражения на двух заданных длинах волн необходимо использовать не менее трех слоев. Аналитическое рассмотрение подобных систем оказывается затруднительным вследствие громоздкости математических выражений. По этой причине для конструирования таких покрытий целесообразно применять численные методы.

Ниже рассмотрены два типа покрытий, предназначенных для просветления стекол с различными показателями преломления и кристаллов ниобата лития.

Покрывание типа  $0,25\lambda_0-0,25\lambda_0-0,25\lambda_0$ . Покрывание с такой структурой может быть с успехом использовано для получения нулевого коэффициента отражения от поверхности практически всех марок стекол одновременно на двух длинах волн. Поскольку спектральная характеристика покрытия с такой структурой симметрична относительно точки  $v=1$ , то целевую функцию, записанную, например, в виде (160), достаточно минимизировать только в одной точке. Контрольная длина волны  $\lambda_k$  в этом случае связана с длинами волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  следующим выражением:

$$\lambda_k = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Важной особенностью этой задачи является то, что число варьируемых параметров, в данном случае показателей преломления, больше числа уравнений связи. Это означает, что существует множество конструкций, обеспечивающих нулевой коэффициент отражения на требуемых длинах волн.

Как показывает анализ, поверхность целевой функции  $F(n_2, n_3)$  при фиксированных значениях  $n_1$  в данном случае имеет четко выраженный «овражный» характер. При этом для каждого значения  $n_1$  имеется свой минимум, расположенный на «дне оврага».

Имеющийся произвол в выборе одного из показателей преломления слоев создает определенные преимущества при конструировании конкретного покрытия и выборе подходящих пленочных материалов. Однако при этом следует иметь в виду, что чем меньше  $n_1$ , тем ниже коэффициент отражения на контрольной длине волны и, следовательно, тем шире спектральные области низкого отражения.

Рассмотрим покрытие, обеспечивающее нулевой коэффициент отражения от подложки с  $n_4=1,51$  одновременно на двух длинах волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , связанных отношением  $\lambda_1/\lambda_2=2$ . Если выбрать  $n_1=1,38$ , то минимум целевой функции достигается при  $n_2=1,58$  и  $n_3=1,82$ . Дополнительные расчеты при этом показали, что если зафиксировать  $n_1$  и  $n_3$ , то подбором показателя преломления среднего слоя можно получить нулевой коэффициент отражения на длинах волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , отношение которых лежит приблизительно в пределах 1,2...2,4.

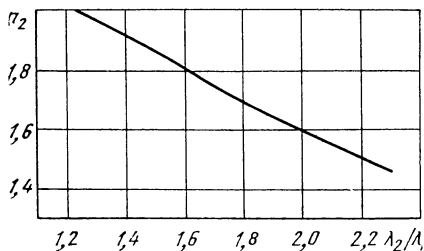


Рис. 50. Зависимость показателя преломления среднего слоя от отношения длин волн, на которых достигается нулевое отражение

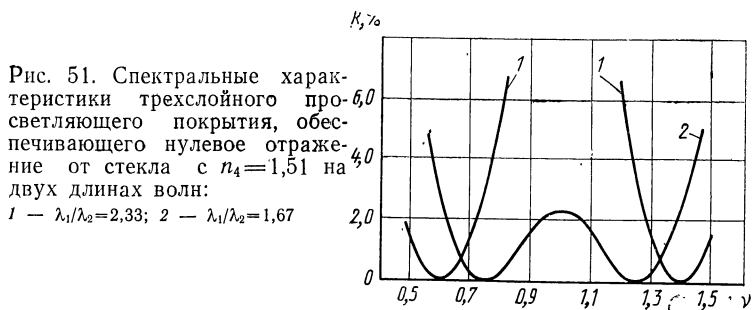


Рис. 51. Спектральные характеристики трехслойного просветляющего покрытия, обеспечивающего нулевое отражение от стекла с  $n_4=1,51$  на двух длинах волн:

1 —  $\lambda_1/\lambda_2=2,33$ ; 2 —  $\lambda_1/\lambda_2=1,67$

На рис. 50 показана зависимость  $n_2$  от отношения  $\lambda_2/\lambda_1$  для подложки с  $n_4=1,51$ . Как видно на рисунке, эта зависимость имеет почти линейный характер.

Приведенный график позволяет для заданного отношения длин волн легко определить показатель преломления среднего слоя. Спектральные характеристики этого покрытия, обеспечивающего нулевой коэффициент отражения на длинах волн с отношением  $\lambda_1/\lambda_2=2,33$  и  $\lambda_1/\lambda_2=1,67$ , приведены на рис. 51. Показатель преломления среднего слоя в данном случае равен 1,44 и 1,76 соответственно.

Заметим, что рассмотренная конструкция покрытия может быть также использована для просветления материалов с довольно широким диапазоном показателей преломления (1,45...1,65).

Просветляющее покрытие со структурой  $0,25\lambda_0-0,25\lambda_0-0,25\lambda_0$  является весьма устойчивым к вариациям показателей преломления слоев. Основное изменение спектральной характеристики при этом связано лишь с изменением коэффициента отражения на контрольной длине волны. Более интересным представляется проанализировать влияние ошибок, возникающих при сквозном фотометрическом контроле толщин слоев, на спектральную характеристику покрытия.

В качестве примера рассмотрим покрытие с показателями преломления  $n_1=1,38$ ;  $n_2=1,58$  и  $n_3=1,82$ , расположенное на подложке с  $n_4=1,51$ .

Предположим, что контроль толщин слоев осуществляется по регистрации отраженного сигнала. Тогда при нанесении слоя с  $n_3=1,82$  коэффициент отражения на контрольной длине волны  $R(\lambda_k)$  возрастает с 4,13 до 13,97%; при нанесении следующего слоя с  $n_2=1,58$   $R(\lambda_k)$  уменьшается до 0,42% и, наконец, при нанесении слоя с  $n_1=1,38$  интенсивность контрольного сигнала увеличивается до 6,3%. В табл. 23 приведены вычисленные значения относительных погрешностей в регистрации интенсивности контрольного излучения при нанесении всех слоев этого покрытия. Там же приведены значения оптических толщин слоев  $G$ , выраженные в частях  $\lambda_k$ , полученные в результате мо-

Оптические толщины слоев покрытия типа  $0,25 \lambda_0 - 0,25 \lambda_0 - 0,25 \lambda_0$ , полученные в результате моделирования процесса фотометрического контроля ( $n_0 = 1$ ;  $n_4 = 1,51$ ;  $\alpha = 1333$ ;  $\beta = 2$ )

Номер слоя	$n_j$	$p$	$c, \%$	$G$
1	1,38	1	2,53	0,2721
2	1,58	—1	1,07	0,2389
3	1,82	1	1,52	0,2748

делирования процесса фотометрического контроля. Спектральные характеристики этого покрытия, вычисленные с учетом и без учета ошибок в толщинах слоев, показаны на рис. 52.

Из сравнения графиков, приведенных на рисунке, видно, что при наличии связанных ошибок в толщинах слоев спектральная зависимость коэффициента отражения несколько сдвигается в длинноволновую сторону, однако отношение длин волн, на которых достигается нулевое отражение, сохраняется. Этот сдвиг при изготовлении покрытия нетрудно учесть путем корректировки контрольной длины волны.

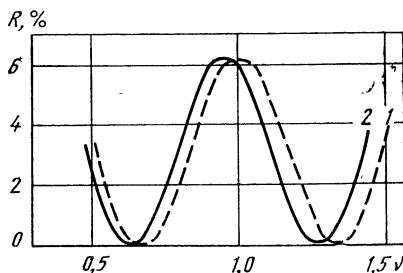


Рис. 52. Спектральные зависимости коэффициента отражения трехслойного просветляющего покрытия для подложки с  $n_4 = 1,51$ : 1 — оптимальное решение; 2 — после моделирования

Покрытие типа  $0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,5\lambda_0$ . Покрытие этого типа дает хорошие результаты при просветлении материалов с относительно высокими показателями преломления,  $n > 2$  (рис. 53).

Рис. 53. Спектральные характеристики просветляющего покрытия для подложки с  $n_4 = 2,28$ :

1 — оптимальное решение; 2 — после моделирования

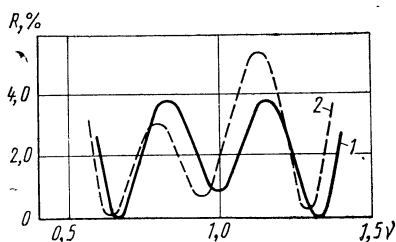


Таблица 24

Оптические толщины слоев покрытия типа  $0,25 \lambda_0 - 0,5 \lambda_0 - 0,5 \lambda_0$ , полученного в результате моделирования процесса фотометрического контроля ( $n_0 = 1$ ;  $n_4 = 2,28$ ;  $\alpha = 3000$ ;  $\beta = 2$ )

Номер слоя	$n_j$	$p$	$c, \%$	$G$
1	1,38	—1	2,39	0,2783
2	1,81	—1	0,38	0,4996
3	1,73	—1	0,5	0,5085

При расчетах принимали  $\alpha = 3000$  и  $\beta = 2$ , а в качестве контрольной пластины использовали стекло с показателем преломления, равным 1,51. Все расчетные данные сведены в табл. 24.

Из сопоставления кривых на рис. 53 видно, что хотя спектральная характеристика покрытия при наличии ошибок в толщинах слоев заметно искажается, однако на требуемых длинах волн коэффициент отражения остается близким к нулю.

### 3. ШИРОКОПОЛОСНЫЕ ПРОСВЕТЛЯЮЩИЕ ПОКРЫТИЯ

Использование одно- и двухслойных покрытий позволяет достичь малых значений коэффициента отражения в сравнительно узком спектральном интервале. Для решения многих практических задач требуются покрытия, которые обеспечивали бы малое отражение в более широкой спектральной области. Типичным примером являются покрытия, предназначенные для просветления оптических элементов в кино- и фотоаппаратуре. Основное требование, предъявляемое к оптическим характеристикам таких покрытий, заключается в получении возможно меньших значений коэффициента отражения от поверхности стекол различных марок в видимой области спектра  $0,4-0,7$  мкм.

В настоящее время известно большое число различных широкополосных просветляющих покрытий, которые обеспечивают уменьшение коэффициента отражения как за счет подбора показателей преломления слоев, так и за счет подбора их толщин [16, 33,47].

В покрытиях первого типа оптические толщины слоев обычно выбирают кратными четверти некоторой длины волны  $\lambda_0$ , принадлежащей середине просветляемого спектрального интервала. Слои в этом случае изготавливают из различных пленочных материалов, имеющих нулевой показатель преломления.

Просветляющие покрытия второго типа, как правило, состоят из двух материалов с чередующимися показателями преломления и различными оптическими толщинами.

Выбор числа слоев в просветляющих покрытиях главным образом зависит от требований, предъявляемых к спектральной характе-



ристике. С помощью покрытий, состоящих из большого числа слоев, в принципе можно получить меньшие значения коэффициента отражения, поскольку добавление каждого нового слоя можно рассматривать как увеличение числа свободных параметров. Однако, в то же время, увеличение числа слоев неизбежно приводит к дополнительным трудностям как при расчете конструкции, так и при ее реализации. Расчеты показывают, что для получения коэффициента отражения, равного 0,1—0,2%, в спектральной области, по ширине соответствующей видимой, достаточно использовать четыре-пять слоев.

Ниже рассмотрено несколько типов широкополосных просветляющих покрытий и оценена их эффективность. При этом анализ оптических свойств покрытий был выполнен численными методами с помощью ЭВМ.

**Трехслойные покрытия.** Покрытие типа  $0,25\lambda_0$ — $0,5\lambda_0$ — $0,25\lambda_0$ . Из всех типов просветляющих покрытий слоистая система с такой структурой по-видимому получила наибольшее распространение при уменьшении коэффициента отражения от поверхности стекол в видимой и ближней инфракрасной областях спектра [16, 17, 47].

В гл. 2 при рассмотрении численных методов конструирования покрытий была найдена совокупность показателей преломления слоев для подложки с  $n_4=1,51$ , обеспечивающая глобальный минимум целевой функции, записанной в виде среднего квадратического отклонения текущего коэффициента отражения от нуля. Используя полученное решение в качестве нулевого приближения, можно легко оптимизировать такое покрытие для других значений показателей преломления подложки (табл. 25). В последнем столбце табл. 25 указаны минимальные значения целевой функции, выраженные в процентах. Такое представление целевой функции позволяет приближенно оценивать интегральный коэффициент отражения от поверхности подлож-

Таблица 25

**Показатели преломления слоев просветляющего покрытия типа  $0,25\lambda_0$  —  $0,5\lambda_0$  —  $0,25\lambda_0$  для различных значений показателей преломления подложек**

$n_4$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$F(x^*)$ , %
1,45	1,38	2,01	1,60	0,206
1,51	1,38	1,99	1,63	0,240
1,55	1,38	1,97	1,64	0,263
1,60	1,38	1,95	1,66	0,295
1,65	1,38	1,94	1,68	0,329
1,70	1,38	1,92	1,70	0,364
1,75	1,38	1,91	1,72	0,399

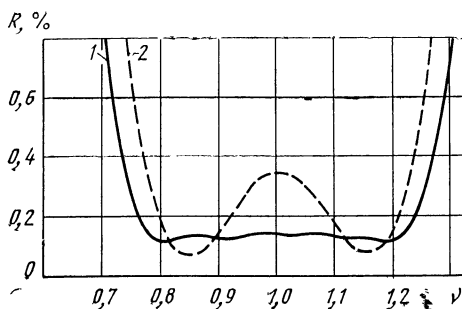


Рис. 54. Спектральные зависимости коэффициента отражения просветляющего покрытия типа  $0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,25\lambda_0$  на подложках с различными показателями преломления  $n_4$ :

1 —  $n_4=1,45$ ; 2 —  $n_4=1,75$

ки, содержащей покрытие. Минимизация целевой функции в данном случае была выполнена методом Хука — Дживса при ограничениях  $1,38 \leq n_j \leq 2,3$ , где  $j=1,3$ .

Из табл. 25 следует, что это покрытие является достаточно эффективным для подложек с показателями преломления, лежащими в интервале 1,45—1,75. При этом согласование пленочной системы с подложкой осуществляется за счет изменения показателей преломле-

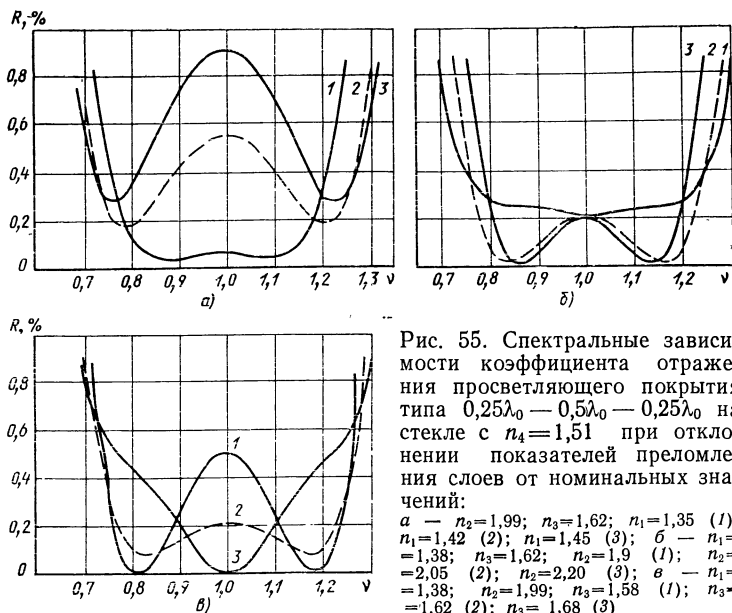


Рис. 55. Спектральные зависимости коэффициента отражения просветляющего покрытия типа  $0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,25\lambda_0$  на стекле с  $n_4=1,51$  при отклонении показателей преломления слоев от номинальных значений:

а —  $n_2=1,99$ ;  $n_3=1,62$ ;  $n_1=1,35$  (1);  $n_1=1,42$  (2);  $n_1=1,45$  (3); б —  $n_1=1,38$ ;  $n_3=1,62$ ;  $n_2=1,9$  (1);  $n_2=2,05$  (2);  $n_2=2,20$  (3); в —  $n_1=1,38$ ;  $n_2=1,99$ ;  $n_3=1,58$  (1);  $n_3=1,62$  (2);  $n_3=1,68$  (3)

ний среднего и внутреннего слоев. На рис. 54, где приведены спектральные характеристики покрытия, рассчитанные для двух значений показателей преломления подложки, видно, что при увеличении  $n_4$  спектральная характеристика несколько сужается, а интегральное отражение растёт.

Рассмотрим, как изменится спектральная характеристика покрытия при отклонении параметров слоев от рассчитанных значений (рис. 55,  $a—в$ ). Анализируя графики, можно проследить основные тенденции изменения характеристики покрытия при том или ином изменении показателей преломления слоев. При уменьшении показателя преломления внешнего слоя заметно уменьшается остаточный коэффициент отражения, однако при этом сужается спектральная область низкого отражения.

Увеличение  $n_1$  приводит к возрастанию коэффициента отражения в середине области просветления, причем тем больше, чем больше  $n_1$  отличается от расчетного значения (рис. 55,  $a$ ).

Увеличение показателя преломления среднего слоя, как видно из рис. 55,  $b$ , приводит к сужению области низкого отражения, а его уменьшение — к возрастанию уровня отражения во всей области просветления. Уменьшение показателя преломления слоя, граничащего с подложкой, приводит к возрастанию коэффициента отражения в средней части характеристики, тогда как при его увеличении спектральная характеристика по форме приближается к характеристике двухслойного просветляющего покрытия для фиксированной длины волны.

Теперь рассмотрим, как влияют на спектральную характеристику этого покрытия ошибки в определении толщины слоев, возникающие при фотометрическом контроле. При нанесении слоя четвертьволновой оптической толщины с  $n_3=1,62$  на стеклянную подложку с  $n_4=1,51$  коэффициент отражения на контрольной длине волны увеличивается от 4,13 до 7,26%; при нанесении второго слоя с  $n_2=1,99$  полувно-

Таблица 26

**Оптические толщины слоев просветляющего покрытия типа  $0,25 \lambda_0 - 0,5 \lambda_0 - 0,25 \lambda_0$ , полученные в результате моделирования процесса фотометрического контроля в режиме измерения отраженного сигнала ( $n_0 = 1$ ;  $n_4 = 1,51$ )**

Номер слоя	$n_j$	$\alpha = 3000$		$\alpha = 2000$	
		$c, \%$	$G$	$c, \%$	$G$
1	1,38	0,94	0,2587	1,42	0,2611
2	1,99	0,42	0,5258	0,63	0,5305
3	1,62	2,13	0,2862	3,19	0,2946

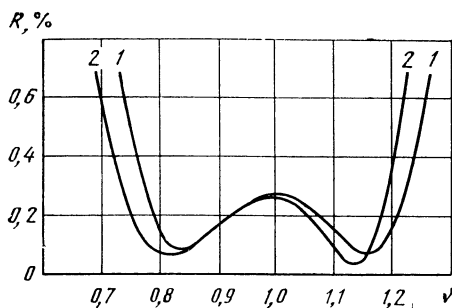


Рис. 56. Спектральные зависимости коэффициента отражения просветляющего покрытия типа  $0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,25\lambda_0$ :

1 — оптимальное решение; 2 — после моделирования при  $\alpha=2000$

вой оптической толщины коэффициент отражения сначала увеличивается до 15,21%, а затем уменьшается до первоначального значения, т. е. до 7,26%; при нанесении последнего слоя с  $n_1=1,38$  четвертьволновой толщины коэффициент отражения уменьшается до 0,21%.

Эти данные позволяют вычислить погрешности в регистрации экстремумов интенсивности контрольного сигнала при нанесении всех слоев. В табл. 26 приведены значения оптических толщин слоев  $G_1$  в частях контрольной длины волны, рассчитанные при  $\alpha=2000$ ;  $\alpha=3000$  и  $\beta=2$ .

Спектральные характеристики покрытия, соответствующие полученным в ходе моделирования значениям оптических толщин слоев, показаны на рис. 56. На рисунке видно, что при наличии ошибок в толщинах слоев кривая коэффициента отражения сдвигается в длинноволновую сторону, а область низкого отражения сужается, причем тем больше, чем меньше чувствительность контрольно-измерительной аппаратуры.

При изготовлении покрытия типа  $0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,25\lambda_0$  на стекле с показателем преломления  $n_4=1,51$  обычно используют пленки фтористого магния, двуокиси циркония и трехокси алюминия, получаемые методом электронно-лучевого испарения в вакууме. Показатели преломления пленок этих материалов близки к оптимальным значениям, полученным из расчета структуры покрытия. Кроме того, использование этих материалов позволяет получать достаточно прочные и долговечные покрытия. Однако при использовании в качестве среднего слоя пленок двуокиси циркония имеется серьезная трудность, связанная с неоднородностью их показателя преломления по толщине. Эта неоднородность зависит от структуры пленок, которая, в свою очередь, определяется условиями изготовления.

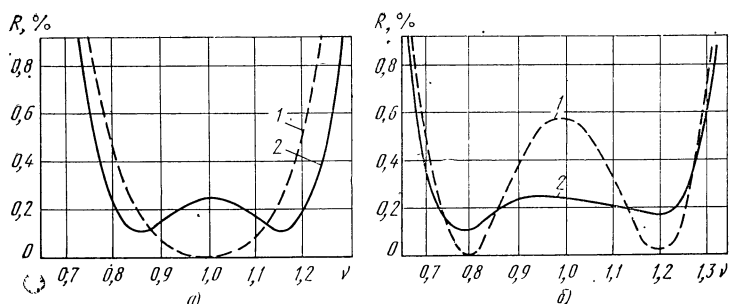


Рис. 57. Спектральные зависимости коэффициента отражения просветляющего покрытия типа  $0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,25\lambda_0$  при различных типах неоднородности показателя преломления:

*а* — положительная неоднородность; *б* — отрицательная неоднородность

В зависимости от температуры нагрева подложек в процессе нанесения пленки двуокиси циркония обнаруживают различные виды неоднородности. Так, при нанесении этих пленок на нагретые до  $250\text{—}300^\circ\text{C}$  подложки показатель преломления уменьшается с ростом их толщины (отрицательная неоднородность), тогда как при нанесении пленок на ненагретые предварительно подложки показатель преломления возрастает по мере увеличения толщины слоя (положительная неоднородность). Неоднородность показателя преломления среднего слоя существенно искажает спектральную характеристику покрытия (кривые 1 на рис. 57 *а, б*).

В расчетах предполагалось, что показатель преломления по толщине слоя изменяется линейно от 1,98 до 2,1. Расчеты показывают, что нежелательное изменение спектральной характеристики покрытия, вызванное неоднородностью показателя преломления среднего слоя, можно скомпенсировать, если выбрать  $n_1 = 1,42$  и  $n_3 = 1,6$  в случае положительной неоднородности и  $n_1 = 1,38$  и  $n_3 = 1,68$  в случае отрицательной неоднородности при линейном профиле показателя преломления (кривые 2).

**Покрyтие типа  $0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0$ .** Покрытие этого типа оказывается менее эффективным по сравнению с рассмотренным выше покрытием при просветлении стекол с низкими значениями показателей преломления. В частности, при просветлении подложек с  $n_4 = 1,45$  значение интегрального отражения оказывается приблизительно вдвое больше, чем при использовании покрытия со структурой  $0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,25\lambda_0$ . Однако данное покрытие оказывается достаточно эффективным при просветлении материалов с высоким показателем преломления (табл. 27). Приведенные в таблице решения соответствуют глобальному минимуму целевой функции вида (160). Для этой

Таблица 27

Показатели преломления слоев просветляющего покрытия типа  $0,25 \lambda_0 - 0,25 \lambda_0 - 0,25 \lambda_0$  для различных значений показателей преломления подложки ( $n_1 = 1,38$ )

$n_4$	$n_2$	$n_3$	$F(x^*)$ , %
1,7	1,92	1,93	0,354
1,75	1,96	2	0,346
1,8	1,95	2,02	0,331
1,85	1,94	2,03	0,324
1,9	1,98	2,1	0,31

конструкции характерно уменьшение минимального значения целевой функции по мере роста показателя преломления подложки (рис. 58).

Следует отметить, что покрытие рассматриваемого типа является особенно эффективным при просветлении материалов прозрачных в инфракрасной области спектра, таких как германий, кремний, арсенид галлия и другие, имеющих высокий показатель преломления.

На рис. 59 приведена спектральная характеристика рассчитанного просветляющего покрытия для германия с  $n_4 = 4$ . В качестве нулевого приближения было выбрано решение такой задачи [16]:  $n_1 = 1,35$ ;  $n_2 = 2$ ;  $n_3 = 2,96$ . В ходе минимизации целевая функция в интервале  $[0,5; 1]$  уменьшилась с 0,978 до 0,601%. При выборе  $\lambda_0 = 5$  мкм это покрытие обеспечивает коэффициент отражения менее 1% в диапазоне 3,4 — 9,6 мкм.

**Покрyтие типа  $0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,5\lambda_0$ .** Покрyтие этого типа является более эффективным для просветления стекол с высоким показателем преломления по сравнению с комбинацией слоев вида  $0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0$ . В табл. 28 приведены оптимальные значения показате-

Таблица 28

Показатели преломления слоев просветляющего покрытия типа  $0,25 \lambda_0 - 0,5 \lambda_0 - 0,5 \lambda_0$  для различных значений показателей преломления подложки ( $n_1 = 1,38$ )

$n_4$	$n_2$	$n_3$	$F(x^*)$ , %
1,7	1,96	1,61	0,25
1,75	1,99	1,62	0,2
1,80	2,02	1,64	0,179
1,85	2,06	1,66	0,179
1,9	2,09	1,68	0,192

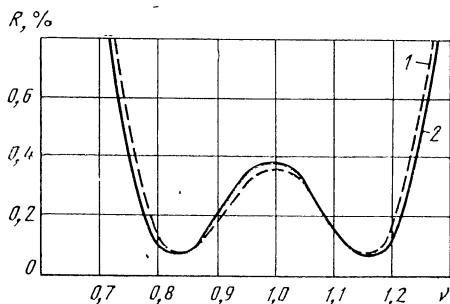


Рис. 58. Спектральные зависимости коэффициента отражения просветляющего типа  $0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0$  на различных подложках:  
1 —  $n_4=1,7$ ; 2 —  $n_4=1,9$

лей преломления слоев для некоторых значений показателей преломления подложки. Оптимизация покрытия, как и ранее, выполнялась путем минимизации целевой функции вида (160) в интервале  $[0,72; 1]$  методом Хука — Дживса. В результате была получена оптимальная характеристика покрытия для подложки с показателем преломления  $n_4=1,75$  (кривая 1 на рис. 60).

Рассмотрим основные особенности контроля оптических толщин слоев этого покрытия фотометрическим методом. Предположим, что контрольная подложка также имеет показатель преломления, равный 1,75. Изменение контрольного сигнала  $R(\lambda_k)$  при нанесении всех слоев покрытия показано на рис. 61, а. Вычисленные относительные погрешности в регистрации экстремумов контрольного сигнала приведены в табл. 29. В этой же таблице указаны значения оптических толщин слоев, полученные в результате моделирования работы блока фотометрического контроля в режиме измерения отраженного сигнала. Соответствующая спектральная характеристика покрытия показана на рис. 60 (кривая 2). На рисунке видно, что область низкого отражения в этом случае несколько сдвигается в длинноволновую область.

Теперь рассмотрим, что произойдет, если толщины слоев контролировать с помощью пластины, у которой показатель преломления равен 1,51. Изменение контрольного сигнала в этом случае показано на рис. 61, б.

Относительные погрешности в регистрации интенсивности контрольного сигнала и оптических толщин слоев, полученные в ре-

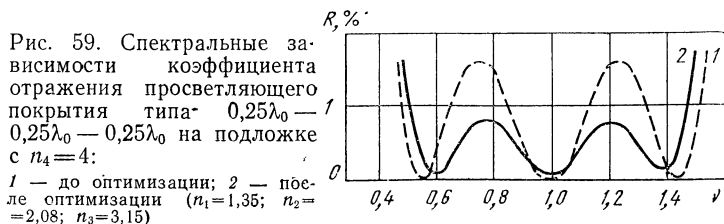


Рис. 59. Спектральные зависимости коэффициента отражения просветляющего покрытия типа  $0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0$  на подложке с  $n_4=4$ :

1 — до оптимизации; 2 — после оптимизации ( $n_1=1,35$ ;  $n_2=2,08$ ;  $n_3=3,15$ )

Оптические толщины слоев просветляющего покрытия типа  $0,25 \lambda_0 - 0,5 \lambda_0 - 0,5 \lambda_0$ , полученные в результате моделирования процесса фотометрического контроля в режиме измерения отраженного сигнала ( $n_0 = 1$ ;  $n_4 = 1,75$ ;  $\alpha = 2000$ ;  $\beta = 2$ )

Номер слоя	$n_j$	Показатель преломления контрольной подложки			
		$n_K = 1,75$		$n_K = 1,51$	
		$c, \%$	$G$	$c, \%$	$G$
1	1,38	1,22	0,2594	3,18	0,3009
2	1,99	0,59	0,5266	2,79	0,5072
3	1,62	1,29	0,5273	1,14	0,5215

в результате моделирования, приведены в табл. 29. Спектральная характеристика этого покрытия на подложке с  $n_4 = 1,75$  показана на рис. 60 (кривая 3). Из сопоставления всех трех кривых, приведенных на рис. 60, видно, что при использовании контрольной пластины с

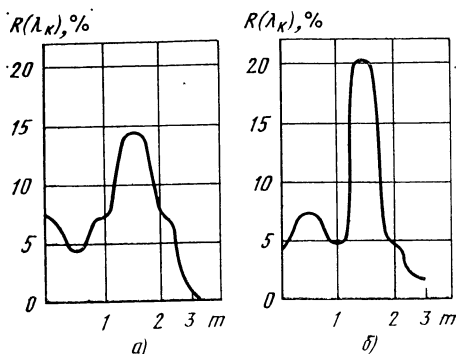
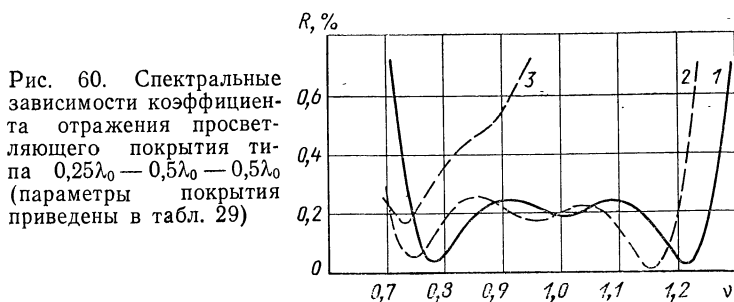


Рис. 61. Изменение интенсивности контрольного излучения от числа слоев при нанесении просветляющего покрытия типа  $0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,5\lambda_0$  на подложку с различными показателями преломления:

$a - n_K = 1,75$ ;  $б - n_K = 1,51$



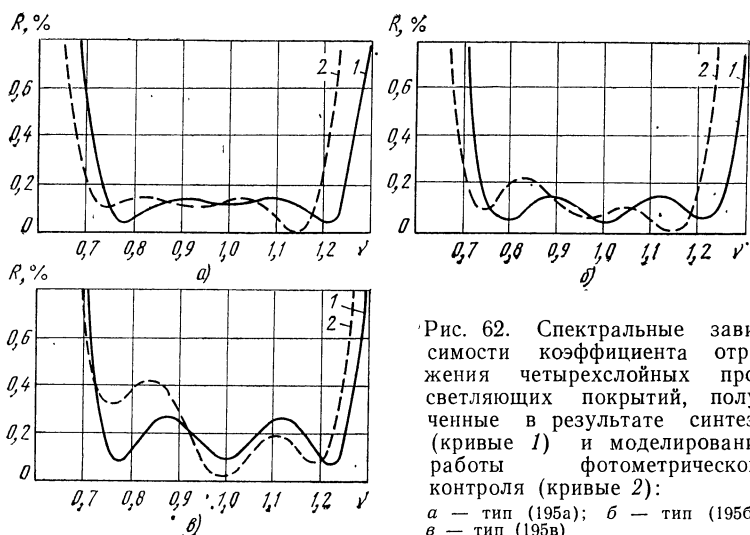


Рис. 62. Спектральные зависимости коэффициента отражения четырехслойных просветляющих покрытий, полученные в результате синтеза (кривые 1) и моделирования работы фотометрического контроля (кривые 2):  
 а — тип (195а); б — тип (195б);  
 в — тип (195в)

$n_k = 1,51$  спектральная характеристика оказывается крайне неустойчивой.

**Четырехслойные покрытия.** Покрытия, состоящие из слоев с оптическими толщинами, кратными четверти длины волны  $\lambda_0$ . Из большого числа возможных комбинаций ограничимся здесь рассмотрением покрытий со следующими структурами:

$$0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0; \quad (195a)$$

$$0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0; \quad (195б)$$

$$0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0. \quad (195в)$$

В табл. 30 приведены значения показателей преломления слоев этих покрытий для различных подложек. Спектральные характеристики коэффициента отражения покрытий, расположенных на подложке с  $n_s = 1,52$ , показаны на рис. 62, а—в. На рисунке видно, что конструкции вида (195а) и (195б) позволяют получить коэффициент отражения менее 0,2% в области, по ширине равной видимой части спектра, а конструкция вида (195в) — коэффициент отражения менее 0,3%. На этих же рисунках показаны спектральные характеристики покрытий, полученные в результате моделирования работы блока фотометрического контроля в режиме измерения отраженного сигнала при  $\alpha = 3000$  и  $\beta = 2$ . Наименее подверженной искажениям в этом случае оказывается конструкция (195а).

Диаграммы рассеяния целевой функции, записанной в виде (160), этих покрытий, полученные методом Монте-Карло, в пред-

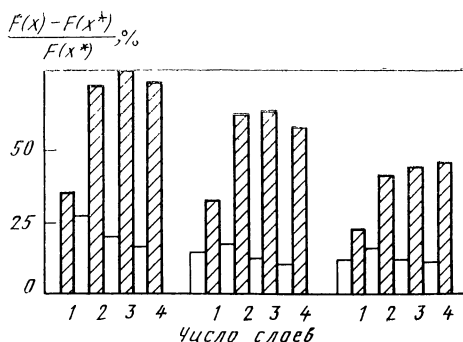


Рис. 63. Рассеяние минимальных значений целевой функции просветляющих покрытий типа (195а), (195б) и (195в) при случайных ошибках в определении параметров слоев

положении, что случайные ошибки в определении параметров слоев распределены по нормальному закону, приведены на рис. 63. Из анализа диаграмм можно сделать вывод, что покрытие типа (195в) более устойчиво к вариациям параметров слоев, особенно к изменению оптических толщин. На рис. 63 области отклонения целевой функции от минимальных значений при изменении оптических толщин слоев заштрихованы.

**Покрyтия, состоящие из слоев различной оптической толщины.** Из рассмотренных выше примеров следует, что для каждого значения показателя преломления подложки необходимо найти свою совокупность параметров слоев, обеспечивающих уменьшение коэффи-

Таблица 30

**Показатели преломления четырехслойных просветляющих покрытий для различных значений показателей преломления подложки ( $n_1 = 1,38$ )**

$n_s$	$0,25 \lambda_0 - 0,25 \lambda_0 - 0,25 \lambda_0 - 0,25 \lambda_0$			$0,25 \lambda_0 - 0,5 \lambda_0 - 0,25 \lambda_0 - 0,25 \lambda_0$			$0,25 \lambda_0 - 0,25 \lambda_0 - 0,25 \lambda_0 - 0,5 \lambda_0$		
	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_2$	$n_3$	$n_4$
1,45	2,15	2,30	1,73	2,05	1,56	1,40	1,86	1,72	1,38
1,52	2,13	2,28	1,76	2,06	1,58	1,44	1,92	1,77	1,38
1,62	2,1	2,27	1,83	2,07	1,59	1,49	1,96	1,86	1,46
1,72	2,1	2,30	1,91	2,07	1,62	1,56	1,99	1,95	1,56
1,8	2,08	2,30	1,97	2,1	1,66	1,62	2,02	2,02	1,64

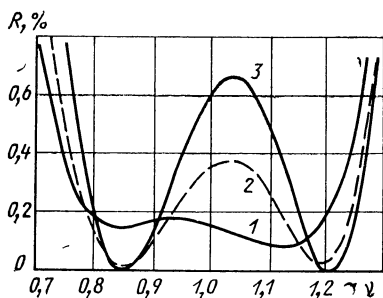


Рис. 64. Спектральные зависимости коэффициента отражения четырехслойного просветляющего покрытия на подложках с различными показателями преломления  $n_5$ :

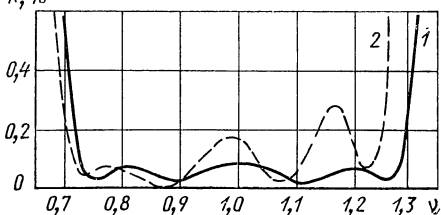
1 —  $n_5=1,52$ ; 2 —  $n_5=1,68$ ; 3 —  $n_5=1,75$

циента отражения как на отдельных длинах волн, так и в спектральном интервале. Изменение показателя преломления подложки, как правило, приводит к заметному увеличению остаточного коэффициента отражения, что в свою очередь, требует дополнительной оптимизации покрытия. При практической реализации покрытия это обстоятельство создает определенные неудобства, так как для каждой подложки требуется свой набор пленочных материалов или, если материалы уже выбраны, необходим пересчет оптических толщин слоев с целью корректировки спектральной характеристики. Поэтому представляется заманчивым сконструировать покрытие, которое обеспечивало бы достаточно эффективное просветление одновременно ряда оптических материалов. В конечном счете это позволит унифицировать технологический процесс изготовления покрытий. Целевую функцию в данном случае можно выразить в виде суммы частных критериев, представляющих собой среднее квадратическое отклонение текущего коэффициента отражения от нуля. При этом суммирование выполняется по всем показателям преломления подложек из рассматриваемого диапазона.

Вполне приемлемое с практической точки зрения решение удается получить в классе четырехслойных покрытий, состоящих из чередующихся слоев с низким ( $n_1=n_3=1,38$ ) и высоким ( $n_2=n_4=1,96$ ) показателями преломления. Оптимизация системы с

Рис. 65. Спектральные зависимости коэффициента отражения просветляющего покрытия типа  $0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,25\lambda_0$  для подложки с  $n_6=1,52$ :

1 — оптимальная конструкция; 2 — после моделирования



**Показатели преломления слоев просветляющего покрытия  
типа  $0,25 \lambda_0 - 0,5 \lambda_0 - 0,5 \lambda_0 - 0,5 \lambda_0 - 0,25 \lambda_0$   
для различных значений показателей преломления подложки**

$n_6$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$
1,45	1,38	2,21	1,53	2,06	1,62
1,52	1,39	2,21	1,54	2,03	1,65
1,70	1,38	2,14	1,58	1,94	1,74

такими показателями преломления путем варьирования оптических толщин слоев приводит к следующему решению:  $G_1=0,2515$ ;  $G_2=0,5505$ ;  $G_3=0,0647$  и  $G_4=0,0639$  (рис. 64). Следует отметить, что спектральные характеристики практически не изменяются при изменении показателей преломления слоев в довольно широких пределах.

**Пятислойные покрытия. Покрытия типа  $0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,25\lambda_0$ .** По аналогии с покрытием типа  $0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,25\lambda_0$  можно предположить, что добавление слоев полуволновой оптической толщины приведет к значительному уменьшению коэффициента отражения от поверхности подложек со сравнительно низкими значениями показателей преломления. Действительно, как показывают расчеты, оптимизация слоистой системы со структурой вида  $0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,25\lambda_0$  позволяет сконструировать ахроматическое просветляющее покрытие с остаточным коэффициентом отражения менее 0,1% (рис. 65, кривая 1, табл. 31).

Можно ожидать, что добавление новых слоев полуволновой оптической толщины приведет к дальнейшему уменьшению коэффициента отражения в области просветления. Однако практического интереса такие конструкции не представляют, поскольку остаточный коэффициент отражения оказывается соизмеримым с коэффициентом рассеяния излучения от покрытия. Этот коэффициент реально составляет сотые доли процента и, кроме того, возрастает с увеличением числа слоев. Более того, подобные конструкции, обеспечивающие очень малый коэффициент остаточного отражения, требуют прецизионного контроля толщин слоев. На спектральной характеристике этого покрытия, полученного в результате моделирования работы блока фотометрического контроля при  $\alpha=3000$  и  $\beta=2$ , видно, что связанные ошибки в толщинах слоев приводят к появлению четко выраженных пиков отражения, значение которых возрастает по мере уменьшения длины волны падающего излучения.

**Покрытие типа  $0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0$ .** Рас-

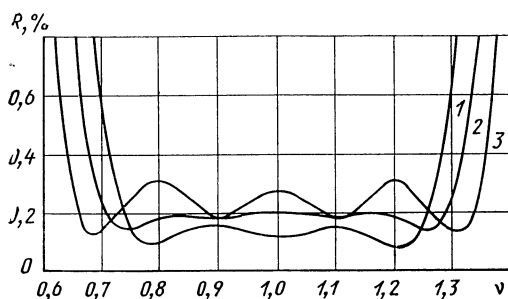


Рис. 66. Спектральные зависимости коэффициента отражения просветляющего покрытия типа  $0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0$  для подложки с  $n_6 = 1,52$ :

смотренные выше конструкции широкополосных просветляющих покрытий позволяют уменьшить коэффициент отражения от поверхности стекол различных марок в спектральной области шириной  $\lambda_1 / \lambda_2 \approx 1,75$ . Однако нередко требуются покрытия, уменьшающие коэффициент отражения в более широкой области спектра. Попытки расширить область просветления неизбежно приводят к увеличению остаточного коэффициента отражения. Тем не менее, используя систему со структурой вида  $0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0$ , удастся сконструировать покрытие, обеспечивающее эффективное уменьшение коэффициента отражения в спектральной области шириной  $\lambda_1 / \lambda_2 \approx 2,05$ . В табл. 32 приведены вычисленные значения показателей преломления слоев этого покрытия. На рис. 66 показано изменение остаточного коэффициента отражения данного покрытия при увеличении спектральной ширины области просветления. Целевая функция, записанная в виде (160), по-

Т а б л и ц а 32

**Показатели преломления слоев просветляющего покрытия типа  $0,25 \lambda_0 - 0,25 \lambda_0 - 0,25 \lambda_0 - 0,25 \lambda_0 - 0,5 \lambda_0$  для различных значений показателей преломления подложки ( $n_1 = 1,38$ )**

Марка стекла	$n_6$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$
ЛК-1	1,4398	2,08	2,28	1,74	1,38
К 8	1,51	2,08	2,3	1,78	1,42
ТК 17	1,6279	2,06	2,3	1,87	1,56
ТФ 5	1,755	2,03	2,3	1,96	1,7
ТФ 10	1,806	2,03	2,3	1,99	1,75

Показатели преломления слоев просветляющего покрытия типа  $0,25 \lambda_0 - 0,25 \lambda_0 - 0,5 \lambda_0 - 0,25 \lambda_0 - 0,5 \lambda_0$  для различных значений показателя преломления подложки ( $n_1=1,38$ )

$n_6$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$
1,45	1,88	2,24	1,77	1,43
1,52	1,89	2,23	1,78	1,38
1,62	1,92	2,27	1,85	1,47
1,75	1,94	2,29	1,94	1,6

следовательно минимизировалась в интервалах  $[0,72; 1]$  (кривая 1),  $[0,68; 1]$  (кривая 2) и  $[0,65; 1]$  (кривая 3). При этом на каждом этапе в качестве нулевого приближения использовалось полученное ранее решение.

**Покрытие типа  $0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0$ .** Как уже отмечалось, расширение спектральной области низкого отражения у покрытия с фиксированным числом слоев и нижним ограничением на значение показателя преломления внешнего слоя всегда сопровождается увеличением остаточного коэффициента отражения. На практике эту трудность удается преодолеть, конструируя покрытия, которые обеспечивают уменьшение коэффициента отражения только в рабочих областях спектра. Хорошим примером таких покрытий может служить система, позволяющая уменьшить коэффициент отражения одновременно в видимой области спектра и на длине волны 1,06 мкм [20].

В табл. 33 приведены значения показателей преломления слоев покрытия для некоторых подложек. В данном случае миними-

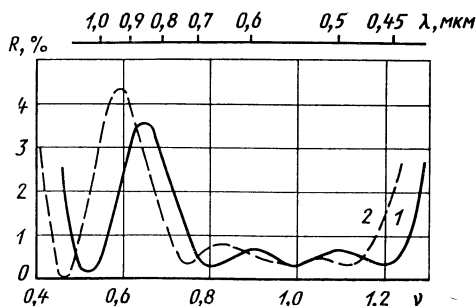


Рис. 67. Спектральные зависимости коэффициента отражения просветляющего покрытия типа  $0,25\lambda_0 - 0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0 - 0,25\lambda_0 - 0,5\lambda_0$  для подложки с  $n_6=1,52$ :

1 — оптимальная конструкция; 2 — после моделирования

Таблица 34

Оптические толщины слоев просветляющего покрытия типа  $0,25 \lambda_0 - 0,25 \lambda_0 - 0,5 \lambda_0 - 0,25 \lambda_0 - 0,5 \lambda_0$ , полученные в результате моделирования процесса фотометрического контроля в режиме измерения отраженного сигнала ( $n_0 = 1$ ;  $n_6 = 1,52$ ;  $\alpha = 5000$ ;  $\beta = 2$ )

Номер слоя	$n_j$	$p$	$c, \%$	$G$
1	1,38	1	0,60	0,2592
2	1,89	1	0,73	0,2765
3	2,23	2	0,46	0,5541
4	1,78	1	0,49	0,2728
5	1,38	2	0,67	0,516

зация целевой функции вида (160) осуществлялась методом прямого поиска в точках  $v=0,50..0,52$  и  $v=0,73..1$  с шагом 0,01. Область поиска ограничивалась неравенствами  $1,38 \leq n_j \leq 2,3$ . Спектральная характеристика покрытия для стекла с  $n_6=1,52$  показана на рис. 67.

Рассмотрим устойчивость спектральной характеристики данного покрытия к ошибкам в определении толщины слоев, возникающим при фотометрическом методе контроля.

Коэффициент отражения на контрольной длине волны при нанесении всех слоев покрытия на стекло с  $n_6=1,52$  изменяется следующим образом. При нанесении слоя с показателем преломления  $n_5=1,38$  коэффициент отражения сначала уменьшается от 4,26 до 1,26%, а затем возрастает до первоначального значения; при нанесении слоя с  $n_4=1,78$  коэффициент отражения увеличивается до 12,36%; при нанесении слоя с  $n_3=2,23$  коэффициент отражения продолжает увеличиваться до 16,75%, а затем убывает до 12,36%; при нанесении слоя с  $n_2=1,89$  коэффициент отражения уменьшается до 6,92%; при нанесении слоя с  $n_1=1,38$  коэффициент отражения уменьшается до 0,28%. По этим данным нетрудно вычислить относительные погрешности в регистрации экстремумов интенсивности контрольного излучения при нанесении всех слоев покрытия.

В табл. 34 приведены номера экстремумов  $p$ , при которых следует прекратить нанесение слоев, и относительные погрешности  $c$  для  $\alpha=5000$  и  $\beta=2$ . В последнем столбце таблицы указаны значения оптических толщин слоев, выраженные в частях контрольной длины волны, полученные в результате моделирования работы блока фотометрического контроля. Соот-

ветствующая спектральная характеристика покрытия показана на рис. 67, кривая 2. Из данного рисунка следует, что спектральная характеристика при наличии связанных ошибок в толщинах слоев несколько сдвигается в длинноволновую область. Этот сдвиг при изготовлении покрытия нетрудно учесть корректировкой длины волны контрольного излучения. Кроме того, ошибки в толщине слоев приводят к уменьшению коэффициента отражения на длине волны 1,06 мкм практически до нуля.

## ГЛАВА 5

# ФИЛЬТРУЮЩИЕ И ПОЛЯРИЗУЮЩИЕ ПОКРЫТИЯ

## 1. ОТРЕЗАЮЩИЕ И ПОЛОСОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Оптические свойства отрезающих и полосовых фильтров характеризуются рядом параметров, показанных на типовых кривых, определяющих зависимость коэффициента пропускания от длины волны (рис. 68). Фильтры, отрезающие коротковолновую область и пропускающие длинноволновую область спектра, называются длинноволновыми. Аналогичным образом определяются коротковолновые фильтры.

Отрезающие фильтры характеризуются следующими основными параметрами. Средний коэффициент пропускания  $T_{cp}$  определяют в диапазоне длин волн от  $\lambda_k$  до  $\lambda_d$ , где  $\lambda_k$  и  $\lambda_d$  — коротковол-

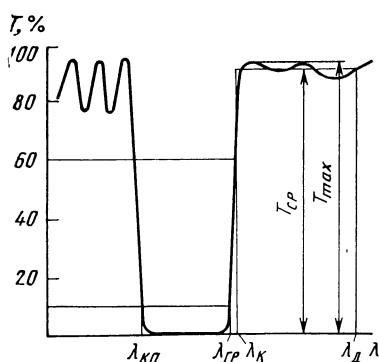


Рис. 68. Спектральная характеристика отрезающего длинноволнового фильтра

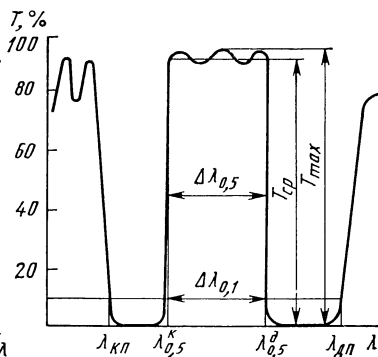


Рис. 69. Спектральная характеристика полосового фильтра



новая и длинноволновая границы рабочего спектрального диапазона соответственно. При этом  $\lambda_k$  выбирают для коэффициентов пропускания  $T \geq 0,6$ . Коэффициент пропускания в области заграждения определяют в интервале от  $\lambda_{гр}$  до  $\lambda_{кп}$  на уровне  $T = 0,1$ , где  $\lambda_{гр}$  — коротковолновая граница рабочего диапазона, а  $\lambda_{кп}$  — коротковолновая граница полосы минимального пропускания. Крутизна коротковолнового фронта пропускания, характеризующая по существу контрастность фильтра, задается отношением  $\lambda_{гр} / \lambda_{0,6}$ , где  $\lambda_{0,6}$  — длина волны, соответствующая уровню пропускания  $T = 0,6$ . Коэффициент пропускания в области заграждения (фоновое пропускание)  $T_f$  обычно указывают в диапазоне  $1,05\lambda_{кп} < \lambda < 0,95\lambda_{гр}$ .

Спектральная ширина полосы пропускания полосового фильтра (рис. 69) определяется по уровням  $0,5T_{max}$  и  $0,1T_{max}$ , где  $T_{max}$  — максимальный коэффициент пропускания. Обозначения остальных параметров полосового фильтра очевидны из кривой, показанной на рис. 69.

Отрезающие и полосовые фильтры, спектральные характеристики которых приведены на рис. 68 и 69, относятся к фильтрам, работающим на «пропускание». Соответствующие характеристики фильтров, отражающих рабочие участки спектра, получаются из этих кривых заменой  $T$  на  $R$  по оси ординат.

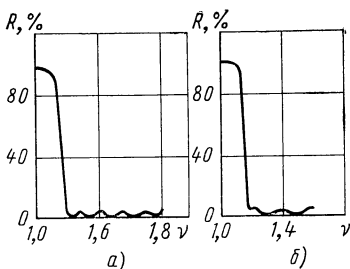
Для конструирования отрезающих фильтров очень часто используют метод эквивалентного слоя. Процесс конструирования в этом случае заключается в следующем. Прежде всего выбирают симметричную слоистую систему определенного вида.

Анализ характеристик симметричного периода, как было показано в гл. 2, позволяет по спектральной зависимости эквивалентного показателя преломления определить области высокого и низкого коэффициентов отражения (пропускания). Заметим, что в частном случае, для систем, состоящих из чередующихся слоев с высоким и низким показателями преломления, эти области можно также определить из дисперсионного уравнения (104). Когда симметричный период выбран, определяется параметр кратности, для того чтобы обеспечить требуемый уровень пропускания в областях заграждения.

Такие системы характеризуются наличием вторичных максимумов коэффициента отражения в полосах пропускания, значения которых, вообще говоря, зависят от соотношения показателей преломления слоев и окружающих сред. Для подавления этих максимумов могут быть использованы как симметричные комбинации слоев, так и отдельные слои, которые располагаются между основной системой и окружающими средами. В тех случаях, когда требуется получить широкую область высокого отражения, можно

Рис. 70. Спектральные зависимости коэффициента отражения коротковолновых фильтров:

$$\begin{aligned}
 & a - \Pi 1,125 \left( \frac{A}{2} B \frac{A}{2} \right) \left( \frac{A}{2} B \frac{A}{2} \right)^5 \times \\
 & \times 1,1 \left( \frac{A}{2} B \frac{A}{2} \right) \\
 & (n_A = 1,38; n_B = 2,3; n_{\Pi} = 1,52); \\
 & б - \Pi \left( \frac{A}{2} B_2 \frac{A}{2} \right)^2 \left( \frac{A}{2} B \frac{A}{2} \right)^6 \times \\
 & \times \left( \frac{A}{2} B_1 \frac{A}{2} \right)^2 \\
 & (n_A = 1,45; n_B = 2,2; n_{B1} = 1,675; \\
 & n_{B2} = 1,82)
 \end{aligned}$$



использовать несколько идентичных систем, спектральные характеристики которых частично перекрываются. Ниже приведено несколько примеров использования этой методики для конструирования различных фильтров.

Рассмотрим конструирование коротковолнового отрезающего фильтра. В качестве исходной конструкции удобно выбрать систему вида  $\left( \frac{A}{2} B \frac{A}{2} \right)^p$  (где  $n_A < n_B$ ), обеспечивающую с коротковолновой стороны относительно зоны заграждения сравнительно небольшой уровень вторичных максимумов коэффициента отражения [17]. Для определенности выберем  $n_A = 1,38$  и  $n_B = 2,3$ . Пятикратное повторение исходного периода в этом случае приводит к достаточно малому коэффициенту пропускания ( $T < 1\%$ ) в зоне заграждения фильтра.

Определить коэффициент отражения в коротковолновой части спектра можно, воспользовавшись формулой (127) для расчета эквивалентного показателя преломления. Для выбранных параметров слоев в точке  $\nu = 1,2$  эквивалентный показатель преломления  $N_E = 0,45$ . Можно подсчитать, что коэффициент отражения в окрестности этой точки при выборе  $n_0 = 1$  и  $n_{m+1} = 1,52$  изменяется приблизительно от 4 до 59%.

Для согласования слоистой системы с окружающими средами в точке  $\nu = 1,2$  используем тот же период вида  $\frac{A}{2} B \frac{A}{2}$  с эквивалентными показателями преломления  $N_{E1} = \sqrt{n_0 N_E} = 0,67$  и  $N_{E2} = \sqrt{n_{m+1} N_E} = 0,83$ . Теперь из формулы (127) можно определить оптические толщины слоев, входящих в согласующие периоды. В данном случае при согласовании исходной системы с воздухом оптические толщины слоев, входящих в период, следует

увеличить в 1,1 раза, а при согласовании с подложкой — в 1,125 раза. Спектральная характеристика этого фильтра приведена на рис. 70, а.

Таким образом, в этом примере согласование основной слоистой системы с окружающими средами в области пропускания достигается с помощью смещенных по частоте периодов. Это позволяет конструировать фильтры на основе только двух различных пленочных материалов.

Данную задачу можно решить, используя в качестве дополнительных согласующих систем периоды, состоящие из слоев равной оптической толщины, но с измененными показателями преломления. На рис. 70, б показана спектральная характеристика такого фильтра. В качестве исходного покрытия выбрана система вида  $\left(\frac{A}{2} B \frac{A}{2}\right)^6$ , где  $n_A=1,45$  и  $n_B=2,2$ , обеспечивающая коэффициент пропускания в области заграждения менее 1%. Для согласования этой системы с окружающими средами с  $n_0=1$  и  $n_{m+1}=1,82$  выбраны те же периоды, но с измененным показателем преломления среднего слоя. Процедура согласования, как и ранее, осуществляется с помощью формулы (127). В данном случае для согласования системы с воздухом необходимо выбрать  $n_{B2}=2,06$ , а с подложкой —  $n_{B1}=1,675$ . Как показали расчеты, для улучшения фазового согласования каждый период дополнительных согласующих систем следует повторить дважды.

Для расширения спектральной области высокого отражения можно использовать несколько систем вида  $\left(\frac{A}{2} B \frac{A}{2}\right)^p$ . В этом случае результирующая система принимает вид

$$\left(\frac{A'}{2} B' \frac{A'}{2}\right)^p \left(\frac{A''}{2} B'' \frac{A''}{2}\right)^p \dots,$$

причем каждая система имеет свой максимум коэффициента отражения на соответствующим образом выбранных частотах  $\nu'$ ,  $\nu''$ , .... Если при этом необходимо обеспечить малый коэффициент отражения в областях пропускания, то следует провести согласование каждой из систем с окружающими средами.

Эффективность и ширина спектрального интервала, в котором подавляются вторичные максимумы коэффициента отражения, существенно зависят от выбора длины волн, для которой осуществляется согласование. Это связано с тем, что дисперсионные зависимости эквивалентных показателей преломления дополнительных согласующих систем и исходной структуры, формирующей область высокого отражения, как правило, заметно различаются. Поэтому фазовое согласование слоистой системы с окружающими

средами удается осуществить только в узком спектральном интервале.

Эффективность подавления вторичных максимумов отражения также зависит от значений показателей преломления окружающих сред. В тех случаях, когда эквивалентный показатель преломления слоистой системы слабо зависит от длины волны  $[N_E(\nu)]$  в окрестности точек  $\nu=0, 2, 4, \dots$  на рис. 16], для эффективного согласования достаточно использовать только один слой. При сильной зависимости  $N_E$  от длины волны  $[N_E(\nu)]$  в окрестности точек  $\nu=0,8; 1,2; \dots$ , как было показано выше, для согласования сред необходимо использовать несколько симметричных периодов, как правило, со структурой, аналогичной или близкой к структуре основной системы, что, естественно, усложняет конструкцию покрытия.

В значительной мере эту трудность удастся преодолеть, если обеспечить постоянство эквивалентного показателя преломления во всей области пропускания, формируемой основной системой [22].

Рассмотрим  $m$ -слойную систему вида  $BA...B$  с эквивалентным показателем преломления  $N_E^{BA...B}$ , заключенную между средами с  $n_0=n_{m+1}$ . Если к этой системе добавить согласующие слои  $A$  с показателем преломления  $n_A$ , то эквивалентный показатель преломления в точках  $\nu=2l$  и  $\nu=(2l+1)/2$  ( $l=0, 1, 2, \dots$ ) можно записать в следующем виде:

$$N_E^{ABA...BA}(2l) = n_A \left( \frac{2+mx}{2+m/x} \right); \quad (196)$$

$$N_E^{ABA...BA} \left( \frac{2l+1}{2} \right) = n_A \left[ \frac{2 - (-1)^{(m-1)/2} (1/y - y)}{2 + (-1)^{(m-1)/2} (1/y - y)} \right]^{1/2}, \quad (197)$$

где

$$x = \frac{N_E^{BA...B}(2l)}{n_A}; \quad y = \frac{N_E^{BA...B} \left( \frac{2l+1}{2} \right)}{n_A}.$$

Для того чтобы получить коэффициент отражения в областях пропускания системы  $AB...A$  близким к нулю, ее необходимо согласовать с окружающими средами, т. е. необходимо выполнить условие

$$N_E^{ABA...BA} \left( \frac{2l+1}{2} \right) = N_E^{ABA...BA}(2l) = n_0. \quad (198)$$

Условие (198) удастся приближенно выполнить, если исходную систему дополнить двумя внешними слоями той же оптической толщины с показателями преломления, выбираемыми из соотношений.

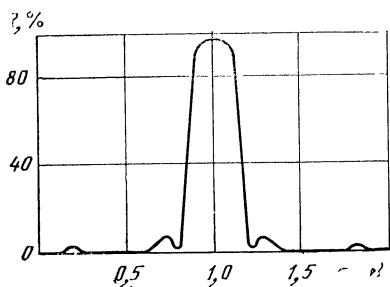


Рис. 71. Спектральная зависимость коэффициента отражения системы вида  $PA_1B_1 (ABA \dots A) B_1A_1P$  ( $n_P=1,7$ ;  $n_A=2,2$ ;  $n_B=1,45$ ;  $n_{A_1}=1,95$ ;  $n_{B_1}=1,57$ )

$$n_{A_1} = \sqrt{n_A n_0}; \quad n_{B_1} = \sqrt{n_B n_0}.$$

При этом структура покрытия принимает вид

$$A_1B_1ABA \dots BAB_1A_1.$$

Таким образом, рассмотренная процедура сводится к однослойному согласованию каждого из показателей преломления исходной системы с окружающими средами. Пример спектральной характеристики такого покрытия показан на рис. 71. Несмотря на то, что «уравнение» эквивалентного показателя преломления в данном случае проводится лишь в двух точках спектрального интервала, тем не менее наблюдается существенное уменьшение вторичных максимумов коэффициента отражения во всей области пропускания. Это связано с тем, что как исходная, так и согласованная система имеют симметричные показатели преломления, т. е.  $N_E(v) = N_E(2q-v)$ , где  $q=0, 1, 2, \dots$ . Можно предположить, что использование двух-, трехслойных и с большим числом слоев согласующих покрытий обеспечит более эффективное подавление вторичных максимумов коэффициента отражения. В этом случае результирующая система будет иметь структуру вида

$$A_l B_l \dots A_1 B_1 ABA \dots ABAB_1 A_1 \dots B_l A_l,$$

где  $A$  и  $B$  — слои, используемые для формирования областей загараждения,  $A_1, A_2, \dots, A_l$  — согласующие слои между средами с показателями преломления  $n_A$  и  $n_0$ ;  $B_1, B_2, \dots, B_l$  — согласующие слои между средами с показателями преломления  $n_B$  и  $n_0$ .

Согласующие слои, естественно, должны образовывать широкополосное просветляющее покрытие между соответствующими средами. В качестве просветляющих покрытий удобно использовать системы со ступенчатым изменением значений показателей преломления слоев [50].

В табл. 35 приведены значения показателей преломления слоев таких покрытий с малым коэффициентом отражения в интервале, определяемом граничными длинами волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , связанными отно-

Значения показателей преломления слоев согласующих систем

$n_0$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	
	$n_1$	$n_1$	$n_1$	$n_2$
1	1	1	1	1
1,25	1,0865	1,0564	1,0356	1,0868
1,5	1,1629	1,105	1,0658	1,1634
1,75	1,232	1,1481	1,0921	1,2325
2	1,2955	1,187	1,1157	1,2957
2,5	1,4098	1,2559	1,1568	1,4091
3	1,5118	1,3162	1,1922	1,5094
4	1,6907	1,4197	1,2518	1,6836
5	1,847	1,5082	1,3018	1,8336
6	1,9877	1,5868	1,3456	1,9669

шенем  $\lambda_2 / \lambda_1 = 4$  [50]. В первом столбце этой таблицы даны значения показателей преломления окружающей среды  $n_0$ .

Для однослойных покрытий ( $m=1$ ) показатель преломления в таблице не приведен — он определяется как квадратный корень от значения показателя преломления окружающей среды.

Для двухслойных покрытий ( $m=2$ ) показатель преломления первого слоя  $n_1$  определяется из второго столбца, а значение показателя преломления второго слоя — по формуле  $n_2 = n_0/n_1$ .

Показатель преломления первого слоя  $n_1$  трехслойного покрытия ( $m=3$ ) выбирают из третьего столбца, а остальные значения вычисляют по формулам  $n_2 = \sqrt{n_0}$  и  $n_3 = n_0/n_1$ .

Значения показателей преломления  $n_1$  и  $n_2$  четырехслойного покрытия ( $m=4$ ) выбирают из двух последних столбцов таблицы, а значения  $n_3$  и  $n_4$  можно определить по формулам  $n_3 = n_0/n_2$  и  $n_4 = n_0/n_1$ .

Показатели преломления слоев для промежуточных значений показателей преломления окружающих сред можно определить интерполяцией. Заметим, что для значений  $n_0 < 4$  покрытия имеют недостижимые для практической реализации показатели преломления слоев. Однако покрытия со ступенчатым изменением показателей преломления слоев удобно использовать для согласования слонстой системы со средами, у которых показатели преломления не равны единице.

На рис. 72 показаны спектральные характеристики систем, заключенных между средами с показателями преломления  $n_0 = n_{II} = 1,8$ , при использовании просветляющих покрытий с различным числом слоев. На рис. 72, а приведена спектральная зависимость эквивалентного показателя преломления для конструкции покрытия, спектральная характеристика которого дана на рис. 72, в. Из рис. 72, г следует,

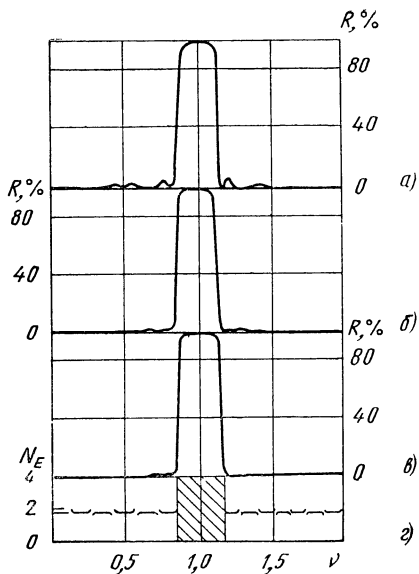


Рис. 72. Спектральные зависимости коэффициента отражения систем с различным числом исходных и согласующих слоев ( $n_A = 2,2$ ;  $n_B = 1,45$ ;  $n_{II} = 1,8$ ):

а —  $PA_2B_2A_1B_2 \underbrace{(AB \dots A)}_{13} B_1A_1B_2A_2P$

б) ( $n_{A1} = 2,03$ ;  $n_{B1} = 1,58$ ;  $n_{A2} = 1,96$ ;  $n_{B2} = 1,65$ );

в —  $P A_3 B_3 A_2 B_2 A_1 B_1 \underbrace{(AB \dots A)}_9 \times$

$\times B_1A_1B_2A_2B_3A_3P$

( $n_{A1} = 2,05$ ;  $n_{B1} = 1,54$ ;  $n_{A2} = 1,99$ ;  $n_{B2} = 1,61$ ;  $n_{A3} = 1,9$ ;  $n_{B3} = 1,7$ );

г —  $PA_4B_4A_3B_3A_2B_2A_1B_1 \underbrace{(AB \dots A)}_9 \times$

$\times B_1A_1B_2A_2B_3A_3B_4A_4P$

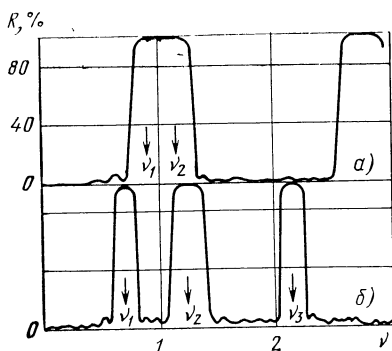
( $n_{A1} = 2,14$ ;  $n_{B1} = 1,49$ ;  $n_{A2} = 2,04$ ;  $n_{B2} = 1,58$ ;  $n_{A3} = 1,95$ ;  $n_{B3} = 1,65$ ;  $n_{A4} = 1,84$ ;  $n_{E4} = 1,74$ );

г — эквивалентный показатель преломления системы в

что  $N_E \approx n_0$  по всей области пропускания. Приведенные спектральные характеристики покрытий показывают, что при достаточно большом числе согласующих слоев число слоев в исходной системе не оказывает существенного влияния на результат согласования. При этом также уместно заметить, что чем ближе показатели преломления слоев исходной системы к показателям преломления окружающих сред, тем лучше удастся подавить вторичные максимумы коэффициента отражения.

Слоистые системы, имеющие спектральные характеристики, приведенные на рис. 71 и 72, представляют собой полосовые фильтры отражательного типа. В литературе такие фильтры часто называются отрицательными. Контрастность отрицательных фильтров может достигать достаточно большой величины. Действительно, в областях заграждения легко получить  $R_{\max} > 99\%$ , тогда как  $R_{\min}$  в среднем не превышает 1—3% при использовании двухслойных и менее 1% при использовании четырехслойных согласующих покрытий. Практически удастся сконструировать отрицательные фильтры с контрастностью, превышающей  $10^3$ .

Увеличение числа согласующих слоев, помимо увеличения коэффициента пропускания и контрастности, приводит к более резкой крутизне характеристики фильтра. В частности, в приведен-



ных выше фильтрах с двух-, трех- и четырехслойными согласующими покрытиями крутизна, соответственно, составляет 0,92; 0,96 и 0,98.

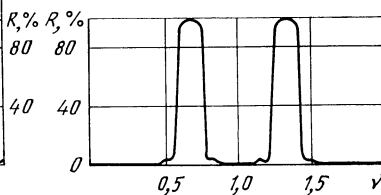


рис. 73. Спектральные зависимости коэффициента отражения систем на основе двух отрицательных фильтров следующих видов ( $n_{\Pi}=1,51$ ;  $n_A=2,2$ ;  $n_B=1,45$ ):

а —  $\Pi A_3 B A_2 B A_1 B \underbrace{(AB \dots A)}_9 B A_1 B A_2 B A_3 \Pi$ ;  $\nu_2/\nu_1=1,27$  ( $n_{A1}=2,01$ ;  $n_{A2}=1,8$ ;  $n_{A3}=1,65$ );

б —  $\Pi A_3 B A_1 B \underbrace{(AB \dots A)}_9 B A_1 B A_2 B A_3 \Pi$ ;  $\nu_2/\nu_1=1,75$  ( $n_{A1}=1,9$ ;  $n_{A2}=1,75$ )

рис. 74. Спектральная зависимость коэффициента отражения полосового пропускающего фильтра с отношением оптических толщин, равным двум:

$\Pi 2A_3 B_3 2A_2 B_2 2A_1 B_1 \underbrace{(2AB \dots 2A)}_9 B_1 2A_1 B_2 2A_2 B_3 2A_3 \Pi$  ( $n_{\Pi}=1,8$ ;  $n_{A1}=2,05$ ;  $n_{B1}=1,54$ ;  $n_{A2}=1,99$ ;  $n_{B2}=1,61$ ;  $n_{A3}=1,9$ ;  $n_{B3}=1,7$ )

Рассмотренная процедура предназначена для конструирования покрытий, состоящих из слоев равной оптической толщины. Спектральная ширина области загораживания такой системы ограничена отношением показателей преломления слоев, образующих исходную систему, приближенно оценивается по формуле (93). Расширить спектральную область высокого отражения можно за счет совмещения спектральных характеристик нескольких фильтров (рис. 73). Отношение частот  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , соответствующих середине областей загораживания каждого фильтра, в данном случае выбрано равным 1,27. Максимальные коэффициенты отражения в областях пропускания в данном случае не превышают 5%, а в среднем составляют 2—3%. Однако из графика видно, что в области высокого отражения такой системы не удастся полностью избежать взаимного влияния фильтрующих структур. Обычно при таком совмещении фильтров в полосе загораживания появляются «провалы», достигающие нескольких процентов (рис. 73, а),



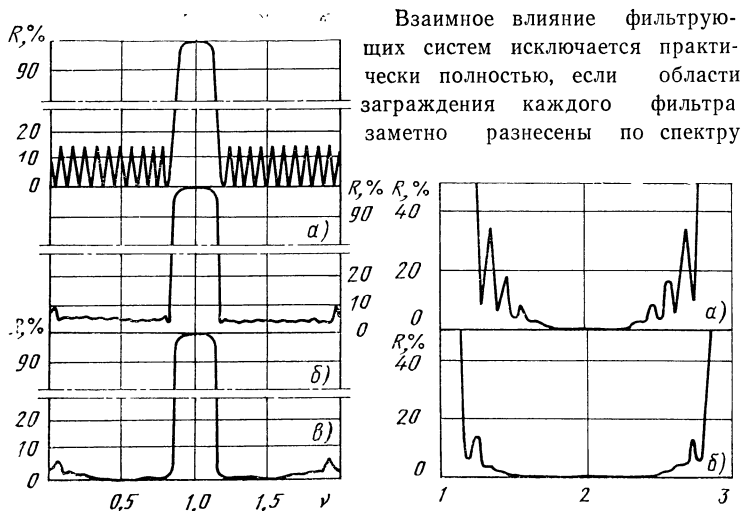


Рис. 75. Спектральные зависимости коэффициента отражения отрицательных фильтров вида

$$PA_4BA_3BA_2BA_1B \underbrace{(AB \dots A)}_9 BA_1BA_2BA_3BA_4$$

для различных окружающих сред ( $n_A=2,2$ ;  $n_B=1,45$ ;  $n_{A1}=2,07$ ;  $n_{A2}=1,92$ ;  $n_{A3}=1,74$ ;  $n_{A4}=1,61$ ):

$a - n_0=1$ ;  $n_{II}=2,3$ ;  $б - n_0=1$ ;  $n_{II}=1,51$ ;  $в - n_0=1$ ;  $n_{II}=1,51$  с дополнительным просветляющим покрытием с  $n_{C1}=1,17$ ;  $n_{C2}=1,29$

Рис. 76. Спектральная зависимость коэффициента отражения систем вида  $\Pi \frac{C_2}{2} (AB \dots A) \frac{C_1}{2}$ , согласованных на  $\nu=2$ :

$a - n_0=1$ ;  $n_{II}=4$ ;  $n_A=4$ ;  $n_B=1,9$ ;  $n_{C1}=1,7$ ;  $n_{C2}=3,4$ ;  $б - n_0=1$ ;  $n_{II}=1,51$ ;  $n_A=2,2$ ;  $n_B=1,45$ ;  $n_{C1}=1,35$ ;  $n_{C2}=1,65$

(рис. 73, б). Уровень остаточного отражения такой системы в среднем не превышает 3—4 %, тогда как эта величина для одиночных фильтров не превышает 2—3 %. Заметим, что максимум коэффициента отражения на частоте  $\nu_3$  соответствует области заграждения второго порядка длинноволнового фильтра, причем их частоты связаны соотношением  $\nu_3=3\nu_1$ .

Приведенные примеры показывают, что, используя отрицательные фильтры, можно создавать покрытия с весьма сложными спектральными характеристиками. При этом важно, что при конструировании покрытий используются доступные пленочные материалы,

Методика сглаживания вторичных максимумов коэффициента отражения может быть использована также при конструировании неравнотолщинных систем, хотя эквивалентный показатель преломления в этом случае имеет в средних областях пропускания различные значения. Остаточный коэффициент отражения при использовании трехслойных согласующих систем в полосе пропускания в среднем не превышает 1%. Подобные структуры можно рассматривать как полосовые фильтры пропускающего типа (рис. 74).

Рассмотрим теперь конструирование отрицательных фильтров, обрамленных несимметричными средами с  $n_0 \neq n_{m+1}$ . На рис. 75 показаны спектральные характеристики фильтра, заключенного между средами с различными показателями преломления. В данном случае в исходной системе слои с высоким показателем преломления согласованы со средой с  $n_{m+1}=1,51$ .

Из этих графиков видно, что в первом случае значение вторичных максимумов коэффициента отражения изменяется от нуля до приблизительно 15%, тогда как во втором случае остаточный коэффициент отражения составляет около 4%. Вообще говоря, в случае несимметричных сред при  $N_E \approx n_{m+1}$  минимальный коэффициент отражения не может быть меньше френелевского для сред с  $n_0$  и  $n_{m+1}$ . Для дальнейшего его уменьшения необходимо дополнительно использовать просветляющие покрытия между фильтрующим покрытием и средами. Выбор просветляющего покрытия определяется конкретными требованиями, предъявляемыми к характеристике фильтра. В качестве просветляющих покрытий можно использовать системы, описанные в работе [50] (см. табл. 35).

На рис. 75,в приведена спектральная характеристика отрицательного фильтра, дополненного просветляющим покрытием с центром в точке  $\nu=1,0$  и показателями преломления  $n_{c1}=1,17$  и  $n_{c2}=1,29$ . Как видно на рисунке, коэффициент отражения в областях  $\Delta\nu=0,4...0,83$  и  $\Delta\nu=1,17...1,6$  оказывается близким к нулю.

Данный пример имеет исключительно иллюстративный характер, так как пленочных материалов с такими показателями преломления нет. По этой причине при конструировании фильтров для несимметричных сред, одной из которых является воздух, подавление вторичных максимумов осуществляется в сравнительно узком спектральном интервале. При этом эффективность подавления в значительной степени зависит от расположения областей заграждения, структуры фильтра и самого просветляющего покрытия.

В некоторых случаях для подавления вторичных максимумов нет необходимости исходную структуру превращать в отрицательный фильтр. В частности, для решения такой задачи в системе, состоящей из чередующихся равнотолщинных слоев с высоким и низким показателями преломления в окрестности  $\nu=2$ , достаточно к ней добавить

по одному согласующему слою между самой системой и окружающими средами, параметры которых определяются из следующих соотношений:

$$n_{C1} = \sqrt{n_0 N_E}; \quad n_{C2} = \sqrt{n_{m+1} N_E}; \quad \Phi_{C1} = \Phi_{C2} = \pi/2. \quad (199)$$

Конструкция покрытия в этом случае принимает вид [12]

$$\Pi 0,5C_2 ABA \dots BA0,5C_1. \quad (200)$$

Спектральная характеристика такого фильтра показана на рис. 76. На рис. 76,а в качестве исходной выбрана 13-слойная система с  $N_E(\nu=2)=2,86$ , а на рис. 76, б — с  $N_E(\nu=2)=1,81$ . Как видно из приведенных графиков, практически полное подавление отражения ( $R \ll 1\%$ ) наблюдается не только в точке  $\nu=2$ , но и в значительно более широкой области. В частности, в примере, показанном на рис. 76,б, при совмещении середины области заграждения ( $\nu=1$ ) с длиной волны  $\lambda=1$  мкм область малого отражения охватывает практически весь видимый диапазон спектра.

Система вида (200) по существу является коротковолновым отрезающим фильтром. Если же оптические толщины согласующих слоев  $C_1$  и  $C_2$  выбрать равными  $(0,5-1)\lambda_0$ , то условие (199) приближенно выполняется на частотах  $\nu < 0,5$ . Тогда система принимает вид

$$\Pi 2C_2 ABA \dots BA2C_1 \quad (201)$$

и представляет собой длинноволновый отрезающий фильтр.

Системы вида (200) и (201) не обеспечивают эффективного подавления вторичных максимумов коэффициента отражения, особенно вблизи областей заграждения. Эту задачу удается удовлетворительно решить, используя отрицательные фильтры. На рис. 77 пред-

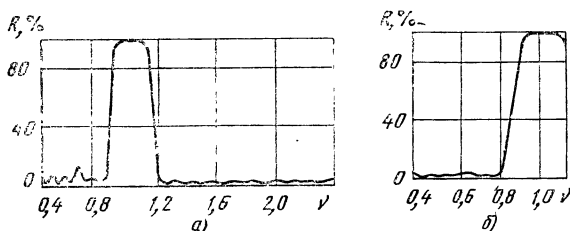


Рис. 77. Спектральные зависимости коэффициента отражения отрезающих фильтров вида  $\Pi C_2 A_3 B_3 A_2 B_2 A_1 B_1 \underbrace{(AB \dots A)}_9 B_1 A_1 B_2 A_2 B_3 A_3 C_1$

( $n_{\Pi}=1,51$ ;  $n_A=2,2$ ;  $n_B=1,45$ ;  $n_{A1}=2,05$ ;  $n_{B1}=1,54$ ;  $n_{A2}=1,99$ ;  $n_{B2}=1,61$ ;  $n_{A3}=1,9$ ;  $n_{B3}=1,7$ ;  $n_{C1}=1,45$ ;  $n_{C2}=1,65$ ;

$a-n_{C1}d_{C1}=n_{C2}d_{C2}=0,15\lambda_0$ ; б —  $n_{C1}d_{C1}=n_{C2}d_{C2}=0,385\lambda_0$ )

ставлены спектральные характеристики коротковолнового и длинноволнового фильтров с резким краем полосы отрезания. Коротковолновый отрезающий фильтр выполнен на основе 23-слойного отрицательного фильтра ( $N_E=1,8$ ) с трехслойными согласующими покрытиями (рис. 77,а).

В данном случае дополнительные слои  $C_1$  и  $C_2$  вместе со слоями  $A_3$  и  $B_3$  образуют просветляющее покрытие, обеспечивающее уменьшение коэффициента отражения в интервале от  $\nu_1=1,2$  до  $\nu_2=2,4$  до 2%. Оптические толщины дополнительных слоев равны четверти длины волны, выбранной из середины этого интервала.

Длинноволновый отрезающий фильтр, спектральная характеристика которого приведена на рис. 77, б, отличается от коротковолнового только оптическими толщинами дополнительных согласующих слоев. Толщину этих слоев выбирают таким образом, чтобы коротковолновая граница области просветления примерно совпадала с границей области заграждения фильтра.

Для сужения спектральной области высокого заграждения при конструировании отрицательных фильтров можно использовать области заграждения второго порядка (рис. 78).

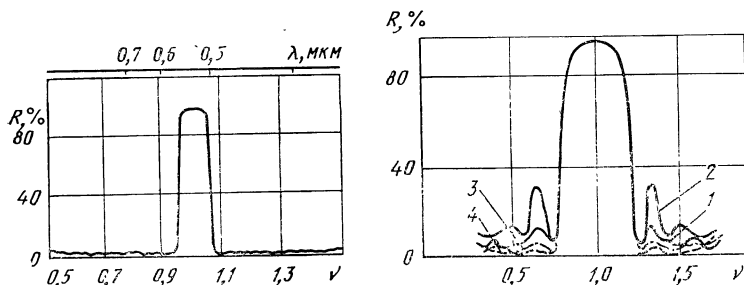


Рис. 78. Спектральная зависимость коэффициента отражения отрицательного фильтра второго порядка вида  $ПС_2 \underbrace{3A_3 3B_3 3A_2 3B_2 3A_1 \times 3B_1}_{9} (3A_3 B \dots 3A) 3B_1 3A_1 3B_2 3A_2 3B_3 3A_3 C_1$  ( $n_0=1$ ;  $n_{II}=1,51$ ;  $n_A=$   
 $=2,2$ ;  $n_B=1,45$ ;  $n_{A1}=2,05$ ;  $n_{B1}=1,54$ ;  $n_{A2}=1,99$ ;  $n_{B2}=1,61$ ;  $n_{A3}=1,9$ ;  $n_{B3}=1,7$ ;  $n_{C1}=1,45$ ;  $n_{C2}=1,65$ )

Рис. 79. Спектральные зависимости коэффициента отражения отрицательных фильтров, рассчитанных методом машинной оптимизации ( $n_{II}=1,52$ ;  $n_A=2,35$ ;  $n_B=1,38$ ), следующих видов:

$$\begin{aligned}
 1 - & \underbrace{PA_2 BA \dots A}_{10} \quad (n_{A2}=1,50); & 2 - & \underbrace{PA B \dots BA_1}_{10} \quad (n_{A1}=1,83) \\
 3 - & \underbrace{PA_2 BA \dots BA_1}_{9} \quad (n_{A1}=1,48; \quad n_{A2}=1,83); & 4 - & \underbrace{PA_2 B_2 AB \dots BA_1}_{8} \\
 & (n_{A1}=1,49; \quad n_{B2}=1,52; \quad n_{A2}=1,86)
 \end{aligned}$$

При конструировании этого фильтра была использована симметричная система с эквивалентным показателем преломления  $N_E = 1,8$ . **Согласование такой системы с окружающими средами** осуществлялось в точке  $\nu = 1$  в соответствии с условием (199). При введении дополнительных слоев максимальное значение коэффициента отражения несколько уменьшается, однако в синей и красной областях спектра удается добиться снижения коэффициента отражения до 3%. Заметим, что такой фильтр может быть использован для формирования гребенчатых фильтров, представляющих собой системы, состоящие из равномерно расположенных областей с высоким и низким пропусканием в видимой части спектра [10]. Подобные системы могут быть получены при соответствующем расположении центров полос заграждения второго порядка трех отрицательных фильтров.

Для конструирования отрезающих и отрицательных фильтров можно также использовать численные методы многопараметрической оптимизации. Машинные методы в этом случае оказываются особенно полезными при создании фильтров с весьма простой структурой, что имеет большое значение для их последующей практической реализации.

Первый шаг при машинном конструировании фильтрующих систем состоит в выборе исходной структуры покрытия, формирующей область заграждения. Как и при использовании метода эквивалентного слоя, в качестве исходной структуры обычно выбирают покрытие, состоящее из чередующихся слоев с высоким и низким показателями преломления четвертьволновой оптической толщины. Число слоев при этом выбирают в соответствии с требованиями к уровню пропускания в полосе заграждения. Затем по рассчитанной спектральной характеристике определяют область, в которой необходимо подавить вторичные максимумы коэффициента отражения. Подавление этих максимумов осуществляется изменением параметров нескольких слоев, которые в данном случае играют роль согласующих. Для решения многих практических задач часто оказывается достаточным изменить параметры одного или двух слоев, расположенных по разные стороны исходной структуры.

Рассмотрим исходное 11-слойное покрытие со структурной формулой вида  $L(BH)^5B$ , где  $n_L = 1,52$ ;  $n_B = 2,35$ ;  $n_H = 1,38$ . Спектральные характеристики новых покрытий получены изменением показателей преломления нескольких слоев с целью подавления вторичных максимумов коэффициента отражения в интервале  $\nu = 0,4 \dots 0,76$  (рис. 79). Целевая функция, записанная в виде (160), была минимизирована методом Хука—Дживса. В первом варианте расчета (кривая 1) изменяли показатель преломления слоя, граничащего с воздухом, а во втором варианте (кривая 2) — показатель преломления слоя, граничащего с подложкой.

Из приведенных графиков видно, что спектральная характеристика фильтра оказывается более чувствительной к изменению показателя преломления внешнего слоя. Если использование одного согласующего слоя недостаточно эффективно подавляет вторичные максимумы коэффициента отражения, то следует увеличить число согласующих слоев. Спектральные характеристики этого покрытия при использовании двух и трех согласующих слоев также показаны на рис. 79 (кривые 3 и 4). Из сопоставления этих кривых видно, что характеристики покрытия при двух- и трехслойном согласовании отличаются незначительно. Это указывает на то, что дальнейшее увеличение числа согласующих слоев в данном случае является нецелесообразным, поскольку не позволяет заметно улучшить характеристику фильтра.

В заключение отметим, что эту задачу можно также решить, варьируя оптические толщины слоев, хотя при этом в силу несимметричности спектральной характеристики результирующей системы относительно точки  $\nu=1$  несколько возрастет объем вычислений. В общем случае при конструировании конкретного фильтрующего покрытия тип варьируемого параметра выбирают исходя из практических соображений, учитывая при этом наличие пленочных материалов, их физические свойства, особенности имеющегося оборудования и контрольно-измерительной аппаратуры.

## 2. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ ПОЛЯРИЗАТОРЫ

При конструировании поляризующих систем обычно пользуются одним из трех физических явлений: двойным лучепреломлением, дихроизмом и поляризацией света при отражении или преломлении волны на границе двух сред. Поляризаторы, принцип действия которых основан на двойном лучепреломлении, изготавливают из двоякопреломляющих кристаллов, чаще всего из исландского шпата, в котором один из лучей, распространяющихся в кристалле, устраняется в результате полного внутреннего отражения. Несмотря на то, что поляризаторы этого типа имеют хорошие оптические характеристики, в частности высокое пропускание  $p$ -поляризованной компоненты излучения и 100%-ную контрастность, их применение на практике ограничено. Это связано с тем, что кристаллические поляризаторы разрушаются под воздействием низких температур и, кроме того, их стоимость очень быстро растет с увеличением апертуры.

Принцип действия дихроичных поляризаторов основан на том, что в некоторых двоякопреломляющих средах обыкновенный и необыкновенный лучи неодинаково поглощаются при распространении излучения в таких средах. Если толщина пластинки, вырезанной из такого анизотропного материала параллельно оптической оси, достаточна для того, чтобы один из лучей полностью поглотился, то прошедший че-

рез пластинку свет будет полностью поляризован. Недостатком таких поляризаторов является то, что они имеют относительно низкий коэффициент пропускания, который к тому же сильно зависит от длины волны падающего излучения. Кроме того, поляризующее действие этих устройств, как правило, ограничено длинами волн  $\lambda \leq 0,6 \dots 0,7$  мкм.

Интерференционные поляризаторы представляют собой удачный компромисс между упомянутыми выше поляризаторами. Поляризаторы на основе тонких пленок удается изготовить с достаточно большим коэффициентом пропускания в довольно широкой спектральной области и весьма большой апертурой (до 100 мм). В основе действия этих поляризаторов лежит тот факт, что плоская неполяризованная волна отражается или проходит через поверхность раздела двух сред с различными показателями преломления; эту поверхность ориентируют под некоторым углом к направлению распространения излучения. В этом случае, как уже было показано в гл. 1, коэффициенты отражения  $s$ - и  $p$ -поляризованного излучения различаются. При этом степень поляризации в отраженном или прошедшем пучках можно существенно повысить, используя многослойные структуры.

Качество интерференционных поляризаторов оценивается по целому ряду критериев. Прежде всего для эффективной работы поляризатора необходимо обеспечить максимальный коэффициент пропускания одной из поляризованных компонент излучения и максимальный коэффициент отражения другой. Эти характеристики называются степенью поляризации прошедшего  $\Delta_T$  и отраженного  $\Delta_R$  излучений и определяются следующими соотношениями:

$$\Delta_T = \frac{T_p - T_s}{T_p + T_s} 100\% \quad \text{и} \quad \Delta_R = \frac{R_s - R_p}{R_s + R_p} 100\%.$$

Очевидно, что при нормальном падении излучения на покрытие  $\Delta_T = \Delta_R = 0$ . Для интерференционных поляризаторов важной характеристикой является также рабочий спектральный интервал, который определяется прозрачностью используемых пленочных материалов. Существенным для расчета поляризующего покрытия является угол или диапазон падения углов на слонстую систему. Совокупность всех оптических характеристик определяет возможность его конкретного применения.

Обычно конструирование поляризующих покрытий осуществляется на основе двухкомпонентных периодических структур, как наиболее простых для анализа и технологической реализации. Рассмотрим некоторые свойства таких систем при наклонном падении излучения. Предположим, что покрытие состоит из слоев с чередующимися показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ , оптические толщины которых равны четверти длины волны по ходу луча, т. е.

$$n_1 d_1 \cos \theta_1 = n_2 d_2 \cos \theta_2 = 0,25\lambda_0.$$

Анализ подобных систем удобно проводить, используя выражения для адмиттансов (82). Рассмотрим сначала систему вида  $(n_1 n_2)^k$ , где число слоев  $m=2k$ . Выражение для адмиттанса в этом случае имеет вид

$$Y_0 = \frac{u_0}{u_{m+1}} \left( \frac{u_1}{u_2} \right)^{2k}. \quad (202)$$

Учитывая определения для эффективных показателей сред (46), выражение (202) можно переписать следующим образом:

$$Y_{os} = - \frac{n_0 \cos \theta_0}{n_{m+1} \cos \theta_{m+1}} \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^{2k} \left( \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \right)^{2k}; \quad (203)$$

$$Y_{op} = \frac{n_0 \cos \theta_{m+1}}{n_{m+1} \cos \theta_0} \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^{2k} \left( \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} \right)^{2k}. \quad (204)$$

Поскольку углы преломления  $\theta_1$  и  $\theta_2$  связаны с углом падения излучения на покрытие  $\theta_0$  соотношением (52), то формулу (203) можно представить в виде

$$Y_{os} = \frac{n_0 \cos \theta_0}{\sqrt{n_{m+1}^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_0}} \left( \frac{n_1^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_0}{n_2^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_0} \right)^k. \quad (205)$$

Перемножая выражения (203) и (204), получим

$$Y_{os} Y_{op} = \left( \frac{n_0^2}{n_{m+1}} \right)^2 \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^{4k}. \quad (206)$$

Теперь из выражений (205) и (206) можно получить расчетные формулы для показателей преломления слоев  $n_1$  и  $n_2$  при известных значениях  $n_0$ ,  $n_{m+1}$ ,  $\theta_0$ ,  $Y_{os}$  и  $Y_{op}$ :

$$n_1 = n_0 \sin \theta_0 \sqrt[4k]{\frac{1 - \sqrt[4k]{a Y_{os}}}{1 - \sqrt[4k]{\left( \frac{a n_0}{n_{m+1}} \right)^2 \left( \frac{Y_{os}}{Y_{op}} \right)}}}; \quad (207)$$

$$n_2 = \frac{n_1}{\sqrt[4k]{\frac{n_{m+1}}{n_0} Y_{os} Y_{op}}}, \quad (208)$$

где

$$a = \frac{\sqrt{n_{m+1}^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_0}}{n_0 \cos \theta_0}.$$



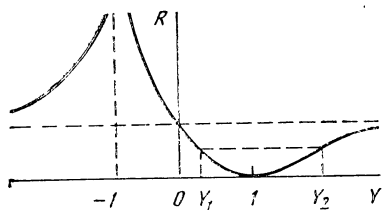


Рис. 80. График функции  $R = \left[ \frac{1 - (Y/n_0)}{1 + (Y/n_0)} \right]^2$  при  $n_0 = 1$

Для симметричных окружающих сред, когда  $n_0 = n_{m+1}$ , формулы (207) и (208) несколько упрощаются:

$$n_1 = n_0 \sin \theta_0 \sqrt{\frac{1 - \sqrt{Y_{0s}}}{1 - \sqrt{Y_{0s}/Y_{0p}}}}; \quad (209)$$

$$n_2 = \frac{n_1}{\sqrt{4k Y_{0s} Y_{0p}}}. \quad (210)$$

В соответствии с формулой (83), если известен адмиттанс для слоистой среды, то легко можно определить соответствующий коэффициент отражения. Из рис. 80, на котором показан график функции (83), следует, что для коэффициентов отражения, имеющих физический смысл, т. е. для  $0 \leq R \leq 1$ ,  $Y_0$  принимает два значения:  $Y_1$  и  $Y_2$ .

Рассмотрим случай, когда коэффициент отражения  $p$ -поляризованной компоненты равен нулю; тогда в соответствии с рис. 80  $Y_{0p} = 1$ . В этом случае из формул (204) и (52) получим

$$n_0 \sin \theta_0 = n_1 n_2 \sqrt{\frac{bn_1^2 - n_2^2}{bn_1^4 - n_2^4}}, \quad (211)$$

где

$$b = \sqrt[k]{\frac{n_0 \sqrt{1 - \left( \frac{n_0}{n_{m+1}} \right)^2 \sin^2 \theta_0}}{n_{m+1} \cos \theta_0}}.$$

В частном случае симметричных окаймляющих сред, когда  $b=1$ , выражение (211) примет вид

$$n_0 \sin \theta_0 = \frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}. \quad (212)$$

Соотношение (212) известно как «обобщенное условие Брюсте-

ра» и является основным для выбора показателей преломления материалов слоев и призм при конструировании так называемых «склеенных» поляризаторов [41].

Выражения (211) и (212) показывают качественно различное поведение поляризующих покрытий с симметричными и несимметричными окружающими средами. В частности, из формулы (211) следует, что нулевое значение коэффициента отражения  $p$ -поляризованной компоненты излучения будет зависеть от числа слоев в покрытии, тогда как в случае симметричных окружающих сред  $R_p$  не зависит от числа слоев. С другой стороны, из этих формул следует, что порядок чередования слоев не влияет на выполнение условия для  $p$ -поляризованного излучения.

Рассмотрим теперь условия для получения нулевого коэффициента отражения  $s$ -поляризованного излучения. Для этого в формуле (202) положим  $Y_{0s}=1$ . Тогда

$$n_0 \sin \theta_0 = \sqrt{\frac{cn_1^2 - n_2^2}{c-1}}, \quad (213)$$

где

$$c = \sqrt[k]{\frac{n_0 \cos \theta_0}{n_{m+1} \sqrt{1 - (n_0/n_{m+1})^2 \sin^2 \theta_0}}}.$$

Из выражения (213) следует, что  $s$ -поляризованное излучение в случае симметричных окружающих сред не может без потерь на отражение проходить через двухкомпонентную равнотолщинную по ходу луча тонкопленочную систему. Однако это условие удастся выполнить для несимметричных окружающих сред.

Приведенные выше формулы (211), (212) определяют условия получения нулевого коэффициента отражения одной из компонент излучения. Для эффективной работы поляризующего устройства необходимо, чтобы вторая компонента имела возможно большее отражение. Предположим, что  $R_p=0$ , а  $R_s$  принимает значения, близкие к единице. Тогда, согласно рис. 80,  $Y_p=1$ , а  $Y_s$  стремится к нулю или бесконечно большим значениям. Можно показать, что значение коэффициента отражения  $s$ -поляризованного излучения, близкого к единице, достигается, когда число слоев в покрытии велико или отношение показателей преломления слоев является очень большим или, наоборот, очень малым. Задаваясь конкретным значением  $R_s$  (т. е.  $Y_{s1}$  и  $Y_{s2}$ ), можно определить показатели преломления слоев  $n_1$  и  $n_2$ .

Выбор значений адмиттансов  $Y_{s1}$  или  $Y_{s2}$  приводит к одним и тем же решениям относительно  $n_1$  и  $n_2$ ; только в первом случае определяется пара значений  $n_1$  и  $n_2$ , а во втором —  $n_2$  и  $n_1$ . Как показывают расчеты, задаваясь  $R_p=0$  и достаточно большим  $R_s$ , удастся скон-

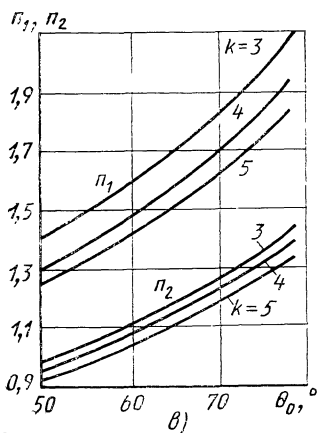
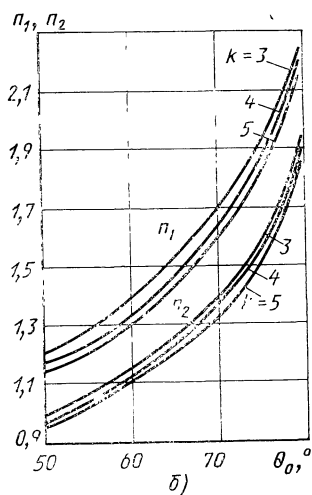
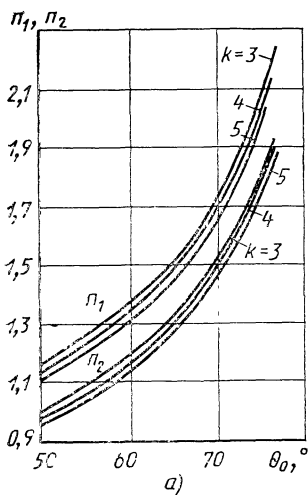


Рис. 81. Значения показателей преломления слоев покрытия типа  $\Pi(n_1, n_2)^k$  в зависимости от угла падения излучения при  $R_p = 0$  и различных  $R_s$ :

а —  $R_s = 80\%$ ; б —  $R_s = 90\%$ ; в —  $R_s = 99\%$

струировать покрытия с доступными для технологической реализации показателями преломления слоев. При этом конкретные решения в большой степени зависят от параметров окружающих сред и угла падения излучения на покрытие.

Имеет смысл отдельно рассмотреть варианты поляризующих покрытий с несимметричными и симметричными окружающими средами. Рассмотрим сначала покрытия с несимметричными окружающими средами (рис. 81, а—в). Для определенности положим  $n_0 = 1$  и  $n_{m+1} = 1,45$ . В качестве параметра здесь выбрано число слоев. Приведен-

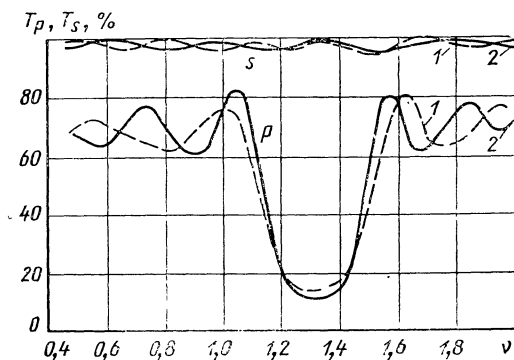


Рис. 82. Спектральные зависимости коэффициента пропускания  $s$ - и  $p$ -поляризованного излучения поляризаторов ( $n_{\Pi}=1,45$ ;  $n_1=1,63$ ;  $n_2=1,38$ ;  $n_0=1$ ;  $\theta=70^\circ$ ):  
1 — типа  $\Pi(n_1 n_2)^4$ ; 2 — типа  $\Pi(n_1 n_2)^3 n_1$

ные графики позволяют для данных параметров окружающих сред, угла падения излучения и числа слоев определить значения  $n_1$  и  $n_2$ . Например, если выбрать  $\theta_0=70^\circ$ ,  $m=8$  и  $R_s=90\%$ , то показатели преломления слоев  $n_1=1,63$  и  $n_2=1,38$  (рис. 81,б).

Спектральные зависимости коэффициентов пропускания различно поляризованных компонент излучения такого покрытия показаны на рис. 82. Отметим одно любопытное свойство этого покрытия. Как показали расчеты, поляризующее действие этой системы практически не изменяется, если оптические толщины слоев выбрать равными четверти длины волны  $\lambda_0$  при нормальном падении излучения. Это обстоятельство указывает на относительно слабую чувствительность характеристик покрытия к изменению толщин слоев, а также на то, что оптическую толщину слоев в процессе изготовления покрытия можно контролировать, используя фотометрический метод.

Как видно из зависимостей коэффициентов пропускания  $s$ - и  $p$ -поляризованных компонент излучения рассматриваемого покрытия от угла падения излучения (рис. 83) в интервале углов  $68-72^\circ$ , значения  $T_s$  и  $T_p$  изменяются незначительно. Из этого же рисунка можно заключить о достаточно слабой чувствительности покрытия к изменению показателей преломления слоев.

Из рассмотренного примера интерференционного поляризатора с несимметричными окружающими средами и покрытием, представляющим периодическую структуру, следует, что для него характерны значительные углы падения излучения и относительно высокое пропускание  $s$ -поляризованной компоненты. Использование симметричных окружающих сред, прежде всего исключение воздушной среды, позво-

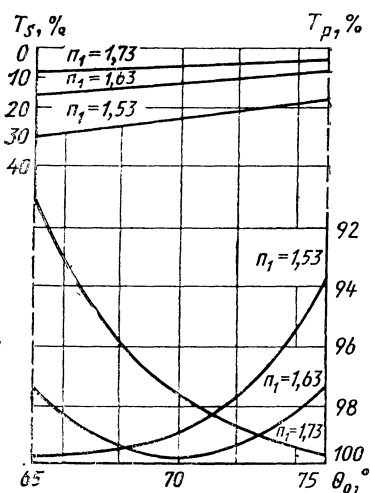


Рис. 83. Угловые зависимости коэффициента пропускания  $s$ - и  $p$ -поляризованного излучения для поляризаторов типа  $P(n_1 n_2)^4$  для различных значений  $n_1$  ( $n_{II}=1,45$ ;  $n_2=1,38$ ;  $n_0=1$ )

ляет существенно улучшить оптическое качество поляризаторов. Конструктивно такие поляризаторы обычно представляют собой две склеенные оптическим клеем равнобедренные стеклянные призмы, между которыми помещено поляризующее покрытие, состоящее из слоев с чередующимися высоким и низким показателями преломления. Показатели преломления слоев и призм выбирают в соответствии с соотношением (212). Угол падения излучения на покрытие обычно берут равным  $45^\circ$ , что позволяет пространственно разделить различно поляризованные компоненты излучения во взаимно перпендикулярных направлениях.

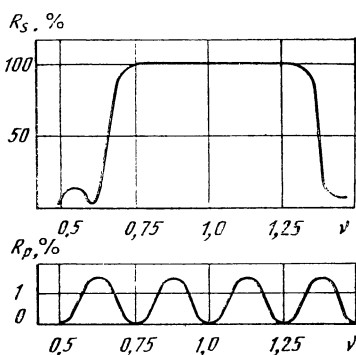
Используя иной подход к выводу формулы (212), можно показать, что коэффициент пропускания излучения не зависит не только от числа слоев, но также и от их толщин [40]. При отсутствии дисперсии показателей преломления материалов слоев и призм  $T_p$  также не зависит от длины волны падающего излучения, оставаясь близким к единице.

Выбор числа слоев и их толщин определяется требованиями к значению коэффициента отражения  $s$ -поляризованного излучения. Если оптические толщины слоев выбрать равными четверти длины волны  $\lambda_0$  по ходу луча, то спектральная ширина области высокого отражения  $s$ -компоненты излучения будет максимальна и ее можно оценить по формуле (93), используя при этом соответствующие значения эффективных показателей преломления слоев.

Основным преимуществом таких поляризаторов является возможность достижения сравнительно высокой степени поляризации.

Рис. 84. Спектральные зависимости коэффициентов отражения  $s$ - и  $p$ -поляризованного излучения поляризаторов типа

$$\Pi \frac{H}{2} BH \dots B \frac{H}{2} \Pi (n_{\Pi}=1,67; \\ n_B=2,30; n_H=1,38; \theta=45^\circ)$$



Теоретически достижимое значение поляризационного отношения в проходящем свете  $T_p/T_s$  превышает  $10^5$  [40]. Однако на практике максимально достижимая степень поляризации ограничивается несовершенством технологии изготовления пленок и остаточным двулучепреломлением материала призм.

Обычно поляризующее покрытие составляется из нескольких структурных периодов вида  $BH$ ,  $\frac{B}{2}H$  или  $\frac{H}{2}B$ . Спектральные характеристики поляризаторов, построенных на основе этих периодов, практически одинаковы. На рис. 84 показаны спектральные характеристики склеенного поляризатора, работающего при угле падения излучения  $\theta_0=45^\circ$ . Поляризующее покрытие в этом случае состоит из четырех периодов вида  $\frac{H}{2}B$  с  $n_B=2,3$  и  $n_H=1,38$ . Заметим, что покрытие с такой структурой наименее чувствительно к изменению угла падения излучения [41]. Это хорошо видно на рис. 85, на котором приведены рассчитанные зависимости коэффициента пропускания  $p$ -поляризованного излучения как функции угла падения девятислойных поляризующих покрытий различных конструкций.

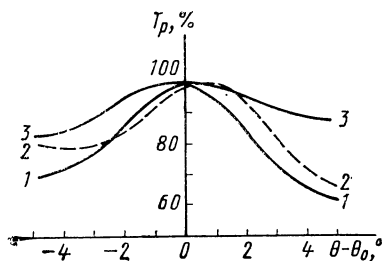


Рис. 85. Угловые зависимости коэффициента пропускания  $p$ -поляризованного излучения различных структур ( $n_{\Pi}=1,67$ ;  $n_B=2,3$ ;  $n_H=1,38$ ):

$$1 - BH; \quad 2 - \frac{B}{2} H \frac{B}{2};$$

$$3 - \frac{H}{2} B \frac{H}{2}$$

Рассмотрим теперь двухкомпонентную периодическую систему с нечетным числом слоев, т. е. систему вида  $(n_1 \ n_2)^k n_1$ . Выражение для адмиттанса в этом случае имеет вид

$$Y_0 = \frac{u_1^2}{u_0 u_{m+1}} \left( \frac{u_1}{u_2} \right)^{2k}. \quad (214)$$

Учитывая определения для эффективных показателей преломления сред (46), это выражение можно записать для каждой поляризации следующим образом:

$$Y_{os} = \frac{(n_1^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_0)^{k+1}}{(n_2^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_0)^k n_0 \cos \theta_0 \sqrt{n_{m+1}^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_0}};$$

$$Y_{op} = n_1^4 \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^{4k} \frac{\cos \theta_0 \sqrt{n_{m+1}^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_0} (n_2^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_0)^k}{n_0 n_{m+1} (n_1^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_0)^{k+1}}.$$

Из последних соотношений нетрудно получить соотношения для вычисления  $n_1$  и  $n_2$ :

$$n_1^2 \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^{2k} = n_0 n_{m+1} \sqrt{Y_{os} Y_{op}}; \quad (215)$$

$$\frac{(n_1^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_0)^{k+1}}{(n_2^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_0)^k} = n_0 \cos \theta_0 \sqrt{n_{m+1}^2 - n_0^2 \sin^2 \theta_0} Y_{os}. \quad (216)$$

Подстановка выражения для  $n_2$  из (215) в (216) позволяет получить уравнение для вычисления  $n_1$ . Однако выразить  $n_1$  и  $n_2$  в явной форме через значения адмиттансов, как это было сделано выше для системы, состоящей из четного числа слоев, в данном случае не удастся. В этом смысле системы, состоящие из четного числа слоев, оказываются «удобнее» для конструирования поляризующих покрытий, чем системы с нечетным числом слоев. Непосредственные вычисления спектральных характеристик поляризующих покрытий обоих видов (конечно, при сравнимом числе слоев) дают близкие результаты (см. рис. 81).

Для симметричных окружающих сред, как уже отмечалось выше, реализуется та же ситуация, что и для четного числа слоев. Основой для определения параметров сред в этом случае является формула (212).

Рассмотренные выше двухкомпонентные периодические системы не исчерпывают всех возможностей конструирования тонкопленочных поляризаторов. Действительно, для поляризации излучения в небольшом спектральном интервале в принципе может быть использовано обычное зеркальное покрытие, состоящее из слоев четвертьволновой



оптической толщины с чередующимися высоким и низким показателями преломления [29].

Возможность использования зеркальных покрытий в качестве поляризатора следует из того, что при наклонном падении излучения на покрытие спектральная ширина области высокого отражения  $s$ -компоненты больше, чем  $p$ -компоненты. В данном случае основная идея заключается в выборе толщин слоев таким образом, чтобы рабочая длина волны располагалась в области высокого отражения  $s$ -поляризованного и в области высокого пропускания  $p$ -поляризованного излучений.

Как известно, ширина спектральной области высокого отражения покрытия определяется отношением показателей преломления слоев, увеличиваясь с его ростом. Поэтому при конструировании поляризаторов этого типа целесообразно выбирать отношение  $n_{\text{В}}/n_{\text{Н}}$  максимально возможным. Рассмотрим такой подход к конструированию интерференционных поляризаторов на конкретном примере [37]. На рис. 86 показаны спектральные характеристики 15-слойного покрытия, состоящего из слоев четвертьволновой оптической толщины при нормальном падении излучения с чередующимися высоким ( $n_{\text{В}}=2,30$ ) и низким ( $n_{\text{Н}}=1,38$ ) показателями преломления, заключенного между призмами с  $n_0=1,45$ . Предположим, что угол падения излучения на покрытие составляет  $67,5^\circ$ . В этом случае тонкопленочный поляризатор геометрически подобен кристаллическому поляризатору Эйхенвальда, состоящему из двух склеенных акриловым клеем призм из кальцита. Заметим, что в данном случае выбор значений  $n_0$  и  $n_{\text{Н}}$  диктуется ограничениями по углу полного внутреннего отражения. Из рис. 86 видно, что в спектральном интервале  $[1,10; 1,49]$   $R_s > 99\%$ , а  $R_p$  представляет собой осциллирующую функцию. Из графика следует, что, выбирая  $\lambda_0$  таким образом, чтобы рабочая длина волны совместилась с одним из минимумов  $R_p$  (например, с  $\nu=1,305$  или



$v=1,41$ ), в принципе можно построить эффективный поляризатор. Однако практически это сделать достаточно трудно, поскольку значение и спектральное положение вторичных максимумов и минимумов коэффициента отражения чрезвычайно чувствительны к ошибкам в определении толщины слоев, неизбежно возникающим при изготовлении покрытия. Таким образом, в данном случае задача конструирования сводится к сглаживанию вторичных максимумов коэффициента отражения  $p$ -поляризованного излучения.

Для решения этой задачи можно использовать метод оптимизации параметров слоев покрытия, например, случайным поиском. Особенностью численного конструирования поляризующих покрытий является то, что оптимизационная задача в данном случае относится к двухкритериальным, а именно, исходя из физического содержания задачи, в данном случае требуется минимизировать  $T_s$  и максимизировать  $T_p$ . Если предположить, что слои покрытия в рабочем диапазоне спектра прозрачны, то целевую функцию можно записать в виде суммы средних квадратических отклонений  $R_p$  и  $T_s$  от нуля:

$$F(x) = \left[ \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L R_p^2(x, v_i) \right]^{1/2} + \left[ \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L T_s^2(x, v_i) \right]^{1/2}. \quad (217)$$

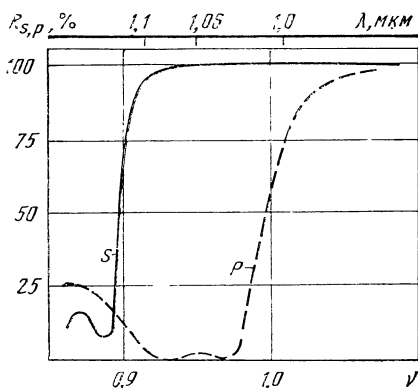
Здесь  $x$  представляет собой вектор-столбец, координатами которого являются оптические толщины слоев  $G_j$  ( $j=1, \dots, 15$ ). Целевую функцию вычисляли в 36 точках, равномерно расположенных в интервале  $[1,1; 1,45]$ . Полученные в результате оптимизации значения оптической толщины слоев в частях  $\lambda_0$  приведены в табл. 36, а соответствующие спектральные характеристики показаны на рис. 86. На рисунке видно, что с помощью оптимизации удается не только

Таблица 36

**Параметры 15-слойного поляризующего покрытия,  
работающего при угле падения излучения  $\theta_0 = 67,5^\circ$**

Номер среды	Показатель преломления среды	Оптическая толщина слоя после оптимизации	Номер среды	Показатель преломления среды	Оптическая толщина слоя после оптимизации
0	1,45	—	9	2,3	0,3164
1	2,3	0,1914	10	1,38	0,2487
2	1,38	0,1537	11	2,3	0,2425
3	2,3	0,2881	12	1,38	0,2387
4	1,38	0,2248	13	2,3	0,2991
5	2,3	0,2688	14	1,38	0,2055
6	1,38	0,2993	15	2,3	0,1486
7	2,3	0,2561	16	1,45	
8	1,38	0,1972			

Рис. 87. Спектральные зависимости коэффициентов отражения  $s$ - и  $p$ -поляризованного излучения 19-слойного поляризующего покрытия (параметры покрытия приведены в табл. 37)



уменьшить значение вторичных максимумов коэффициента отражения, но также заметно расширить рабочую область. Коэффициент остаточного отражения  $p$ -поляризованного излучения в диапазоне  $[1,01; 1,41]$  не превышает 2,2%. При этом  $R_s$  с уменьшением длины волны монотонно возрастает до 99,99%, и вычисленное поляризационное отношение для прошедшего излучения  $T_p/T_s$  превышает  $10^5$ .

В качестве другого примера рассмотрим поляризатор с несимметричными окружающими средами воздух — стекло. Такие поляризаторы представляют собой плоскопараллельную стеклянную подложку, на одну из поверхностей которой нанесено покрытие, состоящее из

Таблица 37

Параметры 19-слойного поляризующего покрытия, работающего при угле падения излучения  $\theta_0 = 57^\circ$

Номер среды	Показатель преломления	Оптическая толщина слоя	Номер среды	Показатель преломления	Оптическая толщина слоя
0	1	—	11	2,3	0,2714
1	2,3	0,2305	12	1,38	0,2849
2	1,38	0,2636	13	2,3	0,226
3	2,3	0,2251	14	1,38	0,254
4	1,38	0,2308	15	2,3	0,2509
5	2,3	0,2409	16	1,38	0,2236
6	1,38	0,2498	17	2,3	0,2325
7	2,3	0,2594	18	1,38	0,2405
8	1,38	0,2596	19	2,3	0,2591
9	2,3	0,26	20	1,52	—
10	1,38	0,2618			

слоев с чередующимися высоким и низким показателями преломления. Угол ориентации пластины к направлению распространения излучения выбирают в зависимости от марки стекла таким образом, чтобы он был равен углу Брюстера на границе стекло — воздух. Чаще всего в качестве материала подложки выбирают стекло с показателем преломления, равным 1,52. В этом случае рабочий угол приблизительно составляет  $57^\circ$  (рис. 87). Оптические толщины слоев в частях  $\lambda_0$ , полученные в результате минимизации функции (217), представлены в табл. 37. На рисунке видно, что в спектральном интервале  $[0,92; 0,97]$  покрытие эффективно поляризует падающее излучение.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

## **ОПТИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛЕНОК**

В данном приложении приведены значения оптических постоянных наиболее распространенных диэлектрических и полупроводниковых пленочных материалов, полученных различными методами. Таблица составлена по данным отечественных и зарубежных работ. Следует отметить, что оптические постоянные существенно зависят как от способа получения пленок, так и от технологических режимов — температуры подложки, скорости осаждения, остаточного давления или давления реактивной среды в вакуумной камере и др. По этой причине их следует рассматривать как ориентировочные.

Пленочный материал	Способ получения	Область прозрачности, мкм	Показатель преломления $n$ в интервале длин волн от $\lambda_1$ до $\lambda_2$ , мкм		Показатель поглощения $\kappa$ на длине волны $\lambda$ , мкм	
			$n$	$\lambda_1 - \lambda_2$	$\kappa$	$\lambda$
$\text{Na}_3\text{AlF}_6$	ТИ, ЭИ	0,2—14	1,37—1,32	0,2—2	—	—
$\text{MgF}_2$	ТИ, ЭИ	0,11—10	1,40—1,32	0,25—2	$6,0 \cdot 10^{-6}$	1,06
$\text{ThF}_4$	ТИ	0,2—15	1,57—1,5	0,25—2	$9,0 \cdot 10^{-5}$	0,52
$\text{CeF}_3$	ТИ	0,3—5	1,69—1,59	0,25—2	$2,0 \cdot 10^{-6}$	1,06
$\text{LaF}_3$	ТИ, ЭИ	0,22—2	1,65—1,57	0,25—2	$5,0 \cdot 10^{-6}$	0,52
$\text{NaF}_3$	ТИ, ЭИ	0,22—2	1,68—1,58	0,25—2	—	—
$\text{PbF}_2$	ТИ	0,24—20	1,75—1,7	0,55—1	—	—
$\text{SiO}_2$	ЭИ, КР, ВР, МР, ОР	0,2—8	1,46—1,44	0,4—1,6	$2,0 \cdot 10^{-6}$	1,06
$\text{Al}_2\text{O}_3$	ЭИ, КР, МР, ВР	0,20—11	1,65—1,57	0,5—1,6	$1,5 \cdot 10^{-5}$	0,52
$\text{U}_2\text{O}_3$	ЭИ, ТИ	—	1,95—1,77	0,25—2	$8,0 \cdot 10^{-6}$	1,06
$\text{HfO}_2$	ЭИ, КР	0,25—9	2,31—1,97	0,25—2	$2,3 \cdot 10^{-5}$	0,52
$\text{ZrO}_2$	ЭИ, КР	0,25—9	2,32—1,98	0,25—2	$4,0 \cdot 10^{-3}$	0,25
					$1,6 \cdot 10^{-3}$	0,25
					$1,0 \cdot 10^{-2}$	0,25

Пленочный материал	Способ получения	Область прозрачности, мкм	Показатель преломления $n$ в интервале длин волн от $\lambda_1$ до $\lambda_2$ , мкм		Показатель поглощения $\kappa$ на длине волны $\lambda$ , мкм	
			$n$	$\lambda_1 - \lambda_2$	$\kappa$	$\lambda$
CeO <sub>2</sub>	ТИ, ЭИ	0,46—2	2,52—1,92	0,4—2	—	—
Ta <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	ЭИ, КР	0,3—2	2,50—2,06	0,25—2	8,0·10 <sup>-3</sup>	0,3
TiO <sub>2</sub>	МР, ВР, ОР	0,4—3	2,55—2,1	0,4—1,5	2,5·10 <sup>-4</sup>	1,06
	ТРИ, ЭИ,				7,5·10 <sup>-1</sup>	0,52
ZnS	КР, МР, ОР	0,38—25	2,35—2,2	0,4—5	3,0·10 <sup>-6</sup>	1,06
	ТИ, ЭИ				2,7·10 <sup>-4</sup>	0,52
ZnSe	ТИ	0,6—15	2,6—2,3	0,5—2	—	—
Si	ТИ, ЭИ	1,1—9	3,4	3	—	—
Ge	ТИ, ЭИ	1,7—23	4,4	2	—	—
PbTe	ТИ, ЭИ	3,5—20	5,6	1—8	—	—
CdTe	ТИ, ЭИ	0,96—28	2,7	1—8	—	—

Обозначения: ТИ — термическое испарение; ТРИ — термическое реактивное испарение; ЭИ — электронно-лучевое испарение; КР — катодное распыление; ВР — высокочастотное распыление; МР — магнетронное распыление; ОР — осаждение из растворов.

Пленочный материал	Способ получения	Область прозрачности, мкм	Показатель преломления $n$ в интервале длин волн от $\lambda_1$ до $\lambda_2$ , мкм		Показатель поглощения $\kappa$ на длине волны $\lambda$ , мкм	
			$n$	$\lambda_1 - \lambda_2$	$\kappa$	$\lambda$
MoO <sub>2</sub>	МР	0,5—>1	2,01—2,04	0,5—0,9	1,5·10 <sup>-3</sup>	0,5
WO <sub>3</sub>	МР, ОР	0,4—>1	2,2	0,5—0,9	2,0·10 <sup>-4</sup>	0,7
Sc <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	ЭИ	0,2—10	1,96—1,99	0,4—1	5,0·10 <sup>-4</sup>	0,6
Y <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	ЭИ	0,2—10	1,75	0,4—1	—	—
Eu <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	ЭИ	0,26—>1	1,82	0,4—1	—	—
La <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	ЭИ	0,2—10	2,03	0,4—1	—	—
Gd <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	ЭИ	0,22—>1	1,98	0,4—1	—	—
Tb <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	ЭИ	—	1,96	0,4—1	—	—
Dy <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	ЭИ	0,21—10	1,97	0,4—1	—	—
Ln <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	ЭИ	0,22—10	1,93	0,4—1	—	—
Er <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	ЭИ	0,26—>1	1,96	0,4—1	—	—
Sm <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	ЭИ	0,23—>1	2,09	0,4—1	—	—
Ho <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	ЭИ	0,22—>1	1,96	0,4—1	—	—
Yb <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	ЭИ	—	1,95	0,4—1	—	—
Pr <sub>6</sub> O <sub>11</sub>	ЭИ	—	1,94	0,4—1	—	—

1. **Аззам Р., Башара Н.** Эллипсометрия и поляризованный свет / Пер. с англ.; Под ред. А. В. Ржанова и К. К. Свиташева. — М.: Мир, 1981. — 583 с.
2. **Аоки М.** Введение в теорию оптимизации / Пер. с англ. Под ред. Б. Т. Поляка. — М.: Наука, 1977. — 343 с.
3. **Батищев Д. И.** Методы проектирования. — М.: Сов. радио, 1975. — 216 с.
4. **Берндт К. Г.** Методы контроля и измерения толщины пленок и способы получения пленок однородных по толщине // Физика тонких пленок / Пер. с англ.; Под ред. В. Б. Сандомирского. — М.: Мир, 1968. — Т. 3. — С. 7—57.
5. **Бернинг П. Х.** Теория и методы расчета оптических свойств тонких пленок // Физика тонких пленок / Пер. с англ.; Под ред. М. И. Елинсона и В. Б. Сандомирского. — М.: Мир, 1967. — Т. 1. — С. 91—151.
6. **Бородюк Н. Р., Мешков Б. Б., Яковлев П. П.** Исследование оптических характеристик узкополосных фильтров методом моделирования // Техника средств связи. Серия: технология производства и оборудование. — 1982. — Вып. 1. — С. 18—26.
7. **Вайнштейн Л. А.** Электромагнитные волны. — М.: Сов. радио, 1957. — 581 с.
8. **Глудкин В. Б., Густов А. Е.** Устройства и методы фотометрического контроля в технологии производства ИС. — М.: Радио и связь, 1981. — 109 с.
9. **Глэнг Р.** Вакуумное испарение // Технология тонких пленок / Пер. с англ.; Под ред. М. И. Елинсона и Г. Г. Смолко. М.: Сов. радио, 1977. — Т. 1. — С. 9—174.
10. **Добровольский Ю. А.** Автоматизированная программа проектирования тонкопленочного интерференционного фильтра на основе использования отрицательных фильтров // Космическая оптика. Труды IX Международного конгресса международной комиссии по оптике / Пер. с англ. Под ред. В. К. Аблекова. — М.: Машиностроение, 1980. — С. 370—376.
11. **Ермолаев А. М., Минков И. М., Власов Л. Г.** Метод расчета многослойного покрытия с заданной отражательной способностью // Оптика и спектроскопия. — 1962. — Т. 13. — Вып. 2. — С. 259—265.
12. **Ефременко В. А., Колодный Г. Я., Мешков Б. Б.** О возможности подавления пиков отражения в полосах пропускания диэлектрических зеркал // Квантовая электроника. — 1974. — Т. 1. — № 8. — С. 1857—1861.
13. **Ефременко В. А.** Методы оценки влияния отклонения конструктивных параметров на оптические свойства интерференционных покрытий // Квантовая электроника. — 1976. — Т. 3. — № 3. — С. 540—547.

14. Кард П. Г. Анализ и синтез многослойных интерференционных пленок. — Таллин: Валгус, 1971. — 235 с.

15. Кизель В. А. Отражение света. — М.: Наука, 1973. — 351 с.

16. Кокс Дж., Хасс Г. Просветляющие покрытия для видимой и инфракрасной областей спектра // Физика тонких пленок / Пер. с англ.; Под ред. М. И. Елинсона и В. Б. Сандомирского. — М.: Мир, 1967. — С. 186—213.

17. Крылова Т. Н. Интерференционные покрытия. — Л.: Машиностроение, 1973. — 224 с.

18. К теории полосовых интерференционных фильтров / Ю. Н. Марков, Е. А. Несмелов, А. С. Никитин, И. С. Гайнутдинов // Оптика и спектроскопия. — 1977. — Т. 53. — Вып. 5. — С. 984—989.

19. Левчук Е. А., Яковлев П. П. Программа синтеза оптических покрытий // Электронная промышленность. — 1981. — Вып. 5—6. — С. 101—102.

20. Мешков Б. Б., Яковлев П. П. Широкополосное просветляющее покрытие // Вопросы радиоэлектроники. Серия: Общие вопросы радиоэлектроники. — 1983. — Вып. 5. — С. 118—121.

21. Мешков Б. Б., Яковлев П. П. К вопросу численного конструирования оптических покрытий с заданными свойствами // Вопросы радиоэлектроники. Серия: Общие вопросы радиоэлектроники. — 1984. — Вып. 3. — С. 124—131.

22. Мешков Б. Б., Проценкова Е. Б., Яковлев П. П. Эффективное подавление побочных максимумов отражения в полосах пропускания интерференционных систем // Вопросы радиоэлектроники. Серия: Общетеchnическая. — 1978. — Вып. 1. — С. 114—121.

23. Мешков Б. Б., Яковлев П. П. Организация проектирования интерференционных покрытий // Обмен опытом в радиопромышленности. — 1984. — Вып. 10. — С. 10—12.

24. Многослойные интерференционные покрытия / Г. Я. Колодный, Е. А. Левчук, Ю. Д. Порядин, П. П. Яковлев // Электронная промышленность. — 1981. — Вып. 5—6. — С. 93—101.

25. Растринин Л. А. Статистические методы поиска. М.: Наука, 1968. 376 с.

26. Рытов С. М. Электромагнитные свойства мелкослойистой среды // ЖЭТФ. — 1965. — Т. 29. — Вып. 5 (11). — С. 605—616.

27. Синтез просветляющих покрытий методом прямого поиска / Г. Я. Колодный, Е. А. Левчук, Б. Б. Мешков, П. П. Яковлев // Квантовая электроника. — 1978. — Т. 5. — № 1. — С. 83—88.

28. Сосси Л. К теории синтеза многослойных диэлектрических светофильтров // Известия АН ЭССР. Серия. Физика, математика. — 1976. — № 2. — С. 171—176.

29. Стойкие интерференционные поляризаторы для ОКГ / Р. С. Соколова, В. А. Серебряков, Н. А. Разумовская, В. Е. Яшин // Оптико-механическая промышленность. — 1977. — № 9. — С. 56—57.

30. Телен А. Конструирование многослойных интерференционных светофильтров // Физика тонких пленок. Т. 5 / Пер. с англ.; Под ред. В. Б. Сандомирского и А. Г. Ждана. — М.: Мир, 1972. — С. 46—83.

31. Фазылызов Р. Х., Хакимов Х. Ш., Гайнутдинов И. С. Аппаратура для контроля толщины оптических покрытий по экстремумам прозрачности // Журнал прикладной спектроскопии. — 1983. — Т. 38. — Вып. 6. — С. 978—982.



32. **Фиакко А., Мак-Кормик Г.** Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации / Пер. с англ.; Под ред. Е. Г. Гольштейна. — М.: Мир, 1972. — 240 с.
33. **Фурман Ш. А.** Тонкослойные оптические покрытия. — Л.: Машиностроение, 1978. — 264 с.
34. **Химмельблау Д.** Прикладное нелинейное программирование / Пер. с англ.; Под ред. М. Л. Быховского. — М.: Мир, 1975. — 534 с.
35. **Шеннон Р.** Имитационное моделирование систем — искусство и наука / Пер. с англ.; Под ред. Е. К. Масловского. — М.: Мир, 1978. — 418 с.
36. **Яковлев П. П., Мешков Б. Б.** Метод конструирования оптических покрытий // Вопросы радиоэлектроники. Серия: Общетехническая. — 1985. — Вып. 12. — С. 125—128.
37. **Яковлев П. П., Мешков Б. Б.** Интерференционный аналог поляризатора Эйхенвальда // Вопросы радиоэлектроники. Серия: Общие вопросы радиоэлектроники. — 1985. — Вып. 7. — С. 126—129.
38. **Apparao K. V. S. R.,** An Improved Optimization Method of Designing Thin Film Filters. — Indian J. Pure Appl. Phys., 1975, v. 13, N 3. P. 183—186.
39. **Arndt J., Baumeister P.,** Reflectance and Phase Envelopes of an Iterated Multilayer. — J. Opt. Soc. Amer., 1966, v. 56, N 12, P. 1760—1762.
40. **Austin R.** Thin Film Polarizing Devices. — Electro—Opt. Sist. Design, 1974, v. 6, N 2. P. 30—35.
41. **Clapham P. B., Downs M. J., King R. G.** Some applications of Thin Films to Polarization Devices. — Appl. Opt., 1969, v. 8, N 10. P. 1965—1974.
42. **Delano E., Pegis R. J.** Methods of Synthesis for Dielectric Multilayer Filters. — Progress in Optics, 1969, v. 7. P. 69—137.
43. **Dobrovolski J. A., Lowe D.** Optical Thin Film Synthesis Program Based on the Use of Fourier Transforms. — Appl. Opt., 1978, v. 17, N 19. P. 3039—3050.
44. **Epstein L. I.** The Design of Optical Filters. — J. Opt. Soc. Amer., 1952, v. 42, N 11. P. 806—810.
45. **Knittl S.** Optics of Thin Films. N.—Y., Wiley, 1976.
46. **Moys B. A.** The Theory of Double—layer Antireflection Coatings. — Thin Solid Films, 1974, v. 24, N 1. P. 145—157.
47. **Musset A., Thelen A.** Multilayer Antireflection Coatings. — Progress in Optics, 1970, v. 8. P. 201—237.
48. **Ohmer M. C.** Design of Three—layer Equivalent Films. — J. Opt. Soc. Amer., 1978, v. 68, N 1. P. 137—139.
49. **Rabinovich K., Pagis A.** Multilayer Antireflection Coatings: Theoretical Model and Design Parameters. — Appl. Opt., 1975, v. 14, N 6. P. 1326—1334.
50. **Yong L.** Synthesis of Multiple Antireflection Films over a Prescribed Frequency Band. — J. Opt. Soc. Amer., 1961, v. 51, N 9. P. 967—974.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

---

Предисловие . . . . .	3
Введение . . . . .	5
<b>Глава 1. Расчет оптических характеристик интерференционных покрытий</b> . . . . .	9
1. Распространение электромагнитных волн в однородной изотропной среде . . . . .	9
2. Отражение и преломление световой волны на плоской границе двух сред . . . . .	13
3. Отражение и прохождение электромагнитной волны через многослойную систему . . . . .	20
4. Периодические системы . . . . .	31
<b>Глава 2. Конструирование интерференционных покрытий</b> . . . . .	39
1. Постановка задачи синтеза покрытий и основные методы ее решения . . . . .	39
2. Метод эквивалентных слоев . . . . .	47
3. Метод оптимизации характеристик покрытий . . . . .	57
<b>Глава 3. Анализ устойчивости характеристик интерференционных покрытий</b> . . . . .	93
1. Факторы, влияющие на оптические характеристики реальных покрытий . . . . .	93
2. Контроль толщин слоев фотометрическим методом . . . . .	96
3. Моделирование на ЭВМ процесса контроля толщин слоев фотометрическим методом . . . . .	103
4. Контроль толщин слоев методом кварцевого резонатора . . . . .	117
<b>Глава 4. Просветляющие покрытия</b> . . . . .	122
1. Просветляющие покрытия для фиксированной длины волны . . . . .	122
2. Просветляющие покрытия для двух длин волн . . . . .	131
3. Широкополосные просветляющие покрытия . . . . .	135
<b>Глава 5. Фильтрующие и поляризующие покрытия</b> . . . . .	151
1. Отрезающие и полосовые фильтры . . . . .	151
2. Интерференционные поляризаторы . . . . .	165
<b>Приложение. Оптические постоянные диэлектрических пленок</b> . . . . .	179
<b>Список литературы</b> . . . . .	183

ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ИЗДАНИЕ

**Петр Петрович Яковлев**  
**Борис Борисович Мешков**

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ  
ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ  
ПОКРЫТИЙ**

**Редактор А. В. Лысенко**  
**Художественный редактор С. С. Водниц**  
**Технический редактор Н. В. Тимофеев**  
**Корректоры Л. Л. Георгиевская,**  
**Л. Е. Сониюшкина**

ИБ № 4788

Сдано в набор 04.12.86. Подписано в печать 19.03.87. Т-09514. Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Бумага типогр. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 10,08. Усл. кр.-отт. 10,29. Уч.-изд. л. 11,07. Тираж 2 600 экз. Заказ 2244. Цена 55 к.

Ордена Трудового Красного Знамени  
издательство «Машиностроение»,  
107076, Москва, Стромьинский пер., 4.

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете СССР  
по делам издательств, полиграфии и  
книжной торговли.  
129041, Москва, Б. Переяславская ул., 46.

## УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Издательство «Машиностроение» с 1968 года выпускает серию книг «Библиотека приборостроителя». За это время вышло в свет более 100 выпусков.

В целях выявления и наиболее полного удовлетворения спроса специалистов-приборостроителей на литературу по вопросам проектирования, расчета, конструирования, особенностям технологии изготовления различных приборов, их надежности, точности, метрологического обеспечения и т. д. издательство проводит Всесоюзную заочную читательскую конференцию по книгам серии «Библиотека приборостроителя» и предлагает Вам принять в ней участие.

Нам интересно Ваше мнение:

- о тематике и актуальности отдельных выпусков и всей серии в целом;

- о тематических направлениях, которые еще недостаточно представлены в серии;

- об уровне раскрытия рассматриваемых вопросов;

- о практической ценности серии в Вашей инженерной деятельности;

- о внешнем и внутреннем оформлении;

- о тираже отдельных выпусков серии.

Издательство с благодарностью примет Ваши замечания и пожелания по всем затронутым вопросам.

**В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «МАШИНОСТРОЕНИЕ»  
В СЕРИИ «БИБЛИОТЕКА ПРИБОРОСТРОИТЕЛЯ»  
ВЫШЛИ СЛЕДУЮЩИЕ КНИГИ:**

**ВЫПУСК 1968 г.**

1. **Тисенко Н. Г., Боркунский Г. Х.** Микропроволока для термокомпенсированных тензодатчиков. 92 с.
2. **Лариков Е. А.** Расчет и проектирование кулачковых механизмов приборов. 104 с.
3. **Таратута Р. Н., Арутюнов Л. А., Цабкевич Э. Р.** Лопастные счетчики. 144 с.

**ВЫПУСК 1972 г.**

4. **Высоцкий А. В., Курочкин А. П.** Конструирование и наладка пневматических устройств для линейных измерений. 152 с.
5. **Акобджанян А. С.** Гидравлические системы измерения усилий. 168 с.
6. **Орлов В. В.** Циферблатные весы. 104 с.
7. **Подрешетников В. А., Плотников В. М.** Детали и узлы пневматических релейных устройств. 192 с.
8. **Ширманов Ф. М.** Расчет и регулирование циферблатных указательных приборов. 144 с.
9. **Тензодатчики для экспериментальных исследований.** Авт.: Н. П. Клокова, В. Ф. Лукашик, Л. М. Воробьева и др. 152 с.

**ВЫПУСК 1973 г.**

10. **Майоров С. В.** Фотоэлектронные и термоэлектронные приборы и их применение. 160 с.
11. **Шаукстель Л. С.** Малогабаритные редукторы с мелкокомодульными зубчатыми передачами. 112 с.
12. **Шкунаев Э. К.** Червячные передачи приборов точной механики. 120 с.
13. **Иванов Б. Н.** Измерение линейных размеров методом обкатывания роликом. 144 с.
14. **Цидулко Ф. В.** Выбор параметров пневматических приборов размерного контроля. 144 с.
15. **Хандельсман Ю. М.** Камневые опоры. 152 с.

**ВЫПУСК 1974 г.**

16. **Киясбейли А. Ш., Перельштейн М. Е.** Вихревые счетчики-расходомеры. 160 с.
17. **Шульц Е. Ф., Речкалов И. Т., Фрейдлин Ю. М.** Индуктивные приборы контроля размеров в машиностроении. 144 с.
18. **Немкевич А. С.** Конструирование и расчет печатающих механизмов. 128 с.
19. **Водяник В. И.** Эластичные мембраны. 136 с.
20. **Мальцев М. Д.** Расчет допусков на оптические детали. 168 с.

**ВЫПУСК 1975 г.**

21. **Срибнер Л. А.** Точность индуктивных преобразователей перемещений. 104 с.

22. **Кайнер Г. К.** Измерение линейных размеров высокоточных деталей. 168 с.

23. **Тимошенко К. Д.** Датчики температуры с твердым наполнителем.

24. **Сильфоны.** Авт.: Андреева Л. Е., Беседа А. И., Богданова Ю. А. и др. 160 с.

#### ВЫПУСК 1976 г.

25. **Гришин Б. С.** Юстировка сложных оптических систем приборов. 208 с.

26. **Пахомов И. И.** Панкратические системы. 160 с.

27. **Бернштейн А. С., Джохадзе Ш. Р., Перова Н. И.** Фотоэлектрические измерительные микроскопы. 128 с.

28. **Самбурский А. И., Новик В. К.** Бесконтактные измерения параметров вращающихся объектов. 144 с.

29. **Милов В. И.** Устройства для контроля прочности. 128 с.

30. **Виноградов Ю. Д., Машинистов В. М., Розентул С. А.** Электронные измерительные системы для контроля малых перемещений. 144 с.

31. **Зарипов М. Ф., Ураксеев М. А.** Функциональные преобразователи перемещений. 136 с.

32. **Бабин М. П.** Управление качеством продукции в приборостроении. 128 с.

#### ВЫПУСК 1977 г.

33. **Плотников В. М., Подрешетников В. А., Тетеревятников Л. Н.** Интегрирующие измерительные приборы. 184 с.

34. **Одинец С. С., Топилин Г. Е.** Средства измерения крутящего момента. 160 с.

35. **Земсков Г. Г., Савельев В. А.** Средства измерения линейных размеров с использованием ОКГ. 88 с.

36. **Романенко Н. Т., Барышев В. Г., Прудников С. Н.** Приборы и устройства поддержания давления воздуха. 128 с.

37. **Глухих В. М., Бобрынин Б. Н.** Средства механизации статистического контроля размеров. 112 с.

38. **Прецизионные датчики угла с печатными обмотками.** Авт.: Л. Н. Сафонов, В. Н. Волянский, А. И. Окулов, В. Н. Прохоров. 152 с.

39. **Феликсон Е. И.** Упругие элементы силоизмерительных приборов. 160 с.

40. **Бегларян В. Х.** Проектирование приборов, оптимальных по конструкторско-технологическим параметрам. 120 с.

41. **Куратцев Л. Е., Цырульников И. М.** Приборы размерного контроля на элементах пневмоавтоматики. 136 с.

#### ВЫПУСК 1978 г.

42. **Киясбейли А. Ш., Перельштейн М. Е.** Вихревые измерительные приборы. 152 с.

43. **Московкин Л. Н., Ошарин В. И.** Фотохимическое фрезерование. 96 с.

44. **Соловьев А. И.** Механизмы приборов в вакууме, газах и холоде. 80 с.

45. Голубь Б. И., Пахомов И. И., Хорохоров А. М. Собственное излучение элементов оптических систем оптико-электронных приборов. 144 с.

#### ВЫПУСК 1979 г.

46. Бурдун Г. Д., Сурогин В. Ф., Даревский В. Г. Методы и средства контроля качества алмазного инструмента. 120 с.

47. Митин В. М., Сотников Б. М., Шрайбман И. М. Технологические основы оптимизации сборочных процессов в приборостроении. 128 с.

48. Шарловский Ю. В. Механические устройства малых оптических систем. 128 с.

49. Осипович Л. А. Датчики физических величин. 160 с.

50. Скоков И. В. Оптические интерферометры. 128 с.

51. Трофимов А. И. Пьезоэлектрические преобразователи статистических нагрузок. 96 с.

52. Автоматические приборы для измерения концентрации суспензий. Авт.: Бегунов Б. Н., Жуков Ю. П., Зудин В. А. и др. 120 с.

53. Бахмутский В. Ф., Гореликов Н. И., Кузин Ю. Н. Оптоэлектроника в измерительной технике. 152 с.

54. Федотов А. В. Расчет и проектирование индуктивных измерительных устройств. 176 с.

55. Гонек Н. Ф. Манометры. (ЛО).

#### ВЫПУСК 1980 г.

56. Коган И. Ш., Сажин С. Г. Конструирование и наладка пневмоакустических измерительных устройств. 124 с.

57. Королев М. В. Эхо-импульсные толщиномеры. 112 с.

58. Головин В. В. Аналоговые пневматические устройства. 156 с.

59. Каратаев Р. Н., Копырин М. А. Расходомеры постоянного перепада давления. 86 с.

60. Благодарный В. М. Ускоренные ресурсные испытания приборных зубчатых приборов. 112 с.

61. Дубров Н. С., Кричевский Е. С., Невзлин Б. И. Многопараметрические влагомеры для сыпучих материалов. 144 с.

#### ВЫПУСК 1981 г.

62. Ионак В. Ф. Приборы кинематического контроля. 128 с.

63. Черничин А. Н. Вибрационно-частотный метод контроля характеристик упругих элементов. 96 с.

64. Грейм И. А. Зеркально-призмные системы. 126 с.

65. Застрогин Ю. Ф. Контроль параметров движения с использованием лазеров. 176 с.

66. Шкатов Е. Ф. Пневматические преобразователи параметров газоочистки. 176 с.

67. Рыбальченко Ю. И. Магнитоупругие датчики крутящего момента. 128 с.

68. Шишкинский В. И. Магнитоанизотропные монолитные силовизмерители. 80 с.

#### ВЫПУСК 1982 г.

69. Маквецов Е. Н., Тартаковский А. М. Дискретные модели приборов. 136 с.

70. Тимошенков К. Д., Минаев В. Н., Гордиенко С. Я. Приборы контроля и регулирования температуры с термометаллическим диском. 112 с.

71. Дискретные средства преобразования и сбора измерительной информации. Авт.: Абдуллаев А. А., Набиев И. А., Гусейнов М. Ш. и др. 144 с.

72. Карцев А. Е., Коротков В. П. Унифицированные струнные измерительные преобразователи. 144 с.

73. Бугров А. В. Высокочастотные емкостные преобразователи и приборы контроля качества, 94 с.

74. Королев М. В., Карпельсон А. Е. Широкополосные ультразвуковые пьезопреобразователи. 158 с.

#### ВЫПУСК 1983 г.

75. Киясбейли А. Ш., Лифшиц Л. М. Счетчики и расходомеры жидкости с овальными шестернями. 144 с.

76. Левин В. И. Пневматические элементы и устройства релейной автоматики. 168 с.

77. Агрегатный комплекс средств измерения вибрации. Авт.: В. А. Маленький, И. М. Недужко, Б. Г. Орлов и др. Под ред. О. Е. Шведенко. 127 с.

78. Скоков И. В. Расчет спектральных интерференционных приборов. 80 с.

79. Шваб И. А., Селезнев А. В. Измерение угловых ускорений. 160 с.

80. Франко Р. Т., Кадук Б. Г., Кравченко А. А. Газоаналитические приборы и системы. Под ред. А. А. Кравченко. 128 с.

81. Бегларян В. Х. Климатические испытания аппаратуры и средств измерений. 160 с.

82. Средства контроля винтовых пружин сжатия. Авт.: Н. М. Бобин, Е. А. Голованов, Ш. И. Гагуа и др. 72 с.

83. Мельников В. Е. Электромеханические преобразователи на базе кварцевого стекла. 160 с.

#### ВЫПУСК 1984 г.

84. Кожевников Ю. Г. Оптические призмы. Изд. 2-е, перераб. и доп. 152 с.

85. Крутоголов В. Д., Кулаков М. В. Ротационные вискозиметры. 112 с.

86. Самсаев Ю. А. Вибрации приборов с опорами качения. 128 с.

87. Матвеев В. И. Отсчетные устройства приборов и систем. 144 с.

88. Парфенов Е. М. Электромеханические модули точного приборостроения. 144 с.

89. Киясбейли А. Ш., Измайлов А. М., Гуревич В. М. Частотно-временные ультразвуковые расходомеры и счетчики. 128 с.

90. Юдич М. З. Аналоговые сравнивающие устройства. 96 с.

91. Петропавловский В. П., Сеницын Н. В. Фазовые цифровые преобразователи угла. 136 с.

#### ВЫПУСК 1985 г.

92. Крутин В. Н. Колебательные реометры. 160 с.

93. Александров В. А., Карамышкин В. В. Конструирование амортизаторов из вспененных материалов для транспортируемых приборов. 80 с.

94. Прокунцев А. Ф., Максимова Е. С. Бесконтактная передача и обработка информации с вращающихся изделий. 80 с.



95. **Королев М. В.** Безэталонные ультразвуковые толщиномеры. 80 с.
96. **Бобровников Г. Н., Новожилов Б. М., Сарафанов В. Г.** Бесконтактные расходомеры. 128 с.
97. **Денисов В. И.** Прецизионные приборы камертонного типа. 112 с.
98. **Климков Ю. М.** Прикладная лазерная оптика. 128 с.
99. **Благодарный В. М.** Расчет мелко модульных зубчатых передач на износ и прочность. 128 с.
100. **Истомин С. Н.** Проектирование мелко модульных передач с применением ЭВМ. 176 с.

ВЫПУСК 1986 г.

101. **Собкин Б. Л.** Автоматизация проектирования аналого-цифровых приборов на микропроцессорах. 128 с.
102. **Соломатин В. А., Шилин В. А.** Фазовые оптико-электронные преобразователи. 144 с.
103. **Комраков Б. М., Шапочкин Б. А.** Измерение параметров оптических покрытий. 128 с.

55 коп.



• МАШИНОСТРОЕНИЕ •